Geometria Affine (analitica).

$AF = (A, f: A \times A \to V_n(\mathbb{K}))$

$AG(n, \mathbb{K}) = \left(\mathbb{K}^n, f \begin{cases} \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \\ P, Q \to Q - P \end{cases}\right)$

sottospazio affine

$\updownarrow$

sottospazio lineare

$[P; W]$ $\quad P \in A \quad W \leq V_n(\mathbb{K})$

parallelismo fra sottospazi lineari

$S = [P; U] \qquad T = [Q; W]$

diciamo $S /\!/ T \iff U \leq W$ oppure $W \leq U$

oss: Siano $S /\!/ T \Rightarrow$ vale una delle seguenti cose

1) $S \leq T$ oppure $T \leq S$ oppure

2) $S \cap T = \emptyset$

DIM: Supponiamo $\exists R \in S \cap \mathcal{T}$

$\Rightarrow S = [R; U] \quad \mathcal{T} = [R; W]$

$\Rightarrow$ se $U \subseteq W$ abbiamo che

$$S \cap \mathcal{T} = [R; U \cap W] =$$
$$= [R; U] = S$$

e dunque $S \subseteq \mathcal{T}$.

similmente se $W \subseteq U$

$\Rightarrow S \cap \mathcal{T} = \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{T} \subseteq S$. $\square$

OSS: Se $\dim S = \dim \mathcal{T} \Rightarrow S \subseteq \mathcal{T}$
$S \parallel \mathcal{T}$ $\quad \Leftrightarrow S = \mathcal{T}$

→ "Due sottospazi affini della medesima dimensione e paralleli o coincidono o hanno intersezione vuota." ||

In particolare 2 rette parallele e distinte hanno intersezione vuota.

Teorema: In uno spazio affine AF per ogni $P, Q \in A$ con $P \neq Q$ $\exists!$ retta r tale che $P, Q \in r$.

DIM: poniamo $r = [P; \mathcal{L}(\overrightarrow{PQ})]$

$\Rightarrow r$ é una retta perché $\overrightarrow{PQ} \neq \underline{0}$

e $P \in r$, $P + \overrightarrow{PQ} = Q \in r$.

[almeno una retta per P, Q esiste].

sia s una retta con $P \in s$, $Q \in s \Rightarrow s = [P; V_1]$

poiché $Q \in s$, $\overrightarrow{PQ} \in V_1 \Rightarrow \mathcal{L}(\overrightarrow{PQ}) \leq V_1$

e poiché ~~V_1~~ $\dim(V_1) = 1$, $V_1 = \mathcal{L}(\overrightarrow{PQ})$.

$\Rightarrow s = r$ $\square$

Def: In AF si dice riferimento affine una coppia ordinata

$$R = (O, \mathcal{B})$$

ove $O \in A$ é un punto e $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 — \bar{e}_n)$ é una base di $V_n(\mathbb{K})$

Sia $AF=(A, f: A\times A \to V_n(\mathbb{K}))$ uno spazio affine e $\Gamma=(O,\mathcal{B})$ un suo riferimento affine.

Per ogni $P\in A$ diciamo <u>coordinate di P rispetto Γ</u> le componenti del vettore $\overrightarrow{OP}$ rispetto la base $\mathcal{B}$.
[O è detto origine del riferimento]

$\overrightarrow{OP}=\sum p_i \bar{e}_i$

e le coordinate di P sono $(p_1 - p_n)\in\mathbb{K}^n$

Denoterò con $\varphi_\Gamma: A\to\mathbb{K}^n$ la funzione che associa ad ogni punto P le sue coordinate rispetto Γ.

OSS: $\varphi_{\Gamma} : A \to \mathbb{K}^n$ é una biiezione

DIM: Siano P, Q due punti di coordinate $(p_1 \text{---} p_n)$, $(q_1 \text{---} q_n)$ rispetto a Γ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OP} = p_1\bar{e}_1 + \text{---} + p_n\bar{e}_n$$
$$\overrightarrow{OQ} = q_1\bar{e}_1 + \text{---} + q_n\bar{e}_n$$

se $(p_1 \text{---} p_n) = (q_1 \text{---} q_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}$ e in particolare

$Q = O + \overrightarrow{OP} = P$

[φ_{Γ} é iniettiva].

Viceversa, sia $(x_1 \text{---} x_n) \in \mathbb{K}^n$

$\Rightarrow$ il punto $O + \sum x_i\bar{e}_i \in A$

ha coordinate $(x_1 \text{---} x_n)$.

[φ_{Γ} é suriettiva]

$\square$

Teorema: Siano $P, Q \in A$
Γ rif. affine $\varphi_\Gamma : A \to \mathbb{K}^n$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{PQ}$ ha componenti rispetto $\mathcal{B}$ date da $\varphi_\Gamma(Q) - \varphi_\Gamma(P)$.

In particolare se

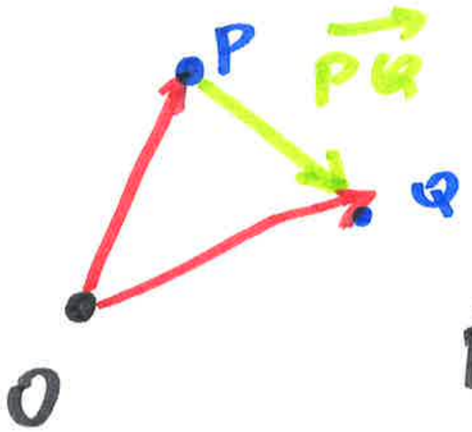
$$\varphi_\Gamma(P) = (p_1 \dots p_n)$$

$$\bar{v} = \sum v_i \bar{e}_i$$

$$\varphi_\Gamma(P + \bar{v}) = (p_1 — p_n) + (v_1 — v_n)$$

$$= \varphi_\Gamma(P) + (v_1 — v_n).$$

DIM:



$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} =$$
$$= -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} \Rightarrow$$

ha componenti $= \varphi_\Gamma(Q) - \varphi_\Gamma(P)$ $\square$

Abbiamo che $\varphi_\Gamma : AF \to AG(n, \mathbb{K})$ è un isomorfismo.

A) ψ_Γ è una biiezione fra i punti di AF e $\mathbb{K}^n$ = punti di $AG(n,\mathbb{K})$.

B) $\overrightarrow{PQ} \in V_n(\mathbb{K})$ viene reint. come il vettore $\psi_\Gamma(Q) - \psi_\Gamma(P)$ = vettore $\overrightarrow{\psi_\Gamma(P)\psi_\Gamma(Q)}$ in $AG(n,\mathbb{K})$.

possiamo, fissato Γ, lavorare sempre in $AG(n,\mathbb{K})$

Come sono descrivibili i sottospazi affini di $AG(n,\mathbb{K})$?

$\Downarrow$

sono sottospazi lineari:

$[P; W_K]$ con $P \in \mathbb{K}^n$ punto e $W_K \leq \mathbb{K}^n$ sottospazio.

$P = (p_1 \text{ --- } p_n)$

$W_K = \mathcal{L}\big((w_{11} \text{ --- } w_{1n}), (w_{21} \text{ --- } w_{2n}) \dots$

$(w_{K1} \text{ --- } w_{Kn})\big)$

$X = (x_1 \text{ --- } x_n) \in [P; W_K]$

$\overrightarrow{PX} \in W_K$

$(x_1 \text{ --- } x_n) - (p_1 \text{ --- } p_n) \in \mathcal{L}((w_{11} \dots), (w_{K1} \dots))$

$$rk \begin{bmatrix} x_1 - p_1 & w_{11} & \dots & w_{K1} \\ x_2 - p_2 & w_{12} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ x_n - p_n & w_{1n} & & w_{Kn} \end{bmatrix} = rk \begin{bmatrix} w_{11} & \dots & w_{K1} \\ \vdots & & \\ w_{1n} & \dots & w_{Kn} \end{bmatrix} = K$$

sistema che descrive $[P; W_K]$

In generale se $\dim W_K = K \Rightarrow$ abbiamo un sistema di $n-K$ eq. di I grado.

minore fondamentale M

$$\operatorname{rk}\begin{bmatrix} x_1-p_1 & w_{11} & \cdots & w_{k1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_k-p_k & w_{1k} & \cdots & w_{kk} \\ x_{k+1}-p_{k+1} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ x_n-p_n & w_{1n} & & w_{kn} \end{bmatrix} = k$$

ha rk=k
perché dim $W_k=k$

rk della matrice é k se $\forall$ orlato di M ha det = 0 cioé se gli n-k orlati di M hanno tutti det = 0.
Usando Laplace rispetto la I colonna si vede che $\forall$ questi minori hanno come det. un polinomio di I grado in $x_1 \dots x_n$ $\circ$

$\downarrow$

sistema lineare compatibile di n-k equazioni in n incognite.

Rette e piani.

$n=2 \rightarrow$ in $AG(2, \mathbb{K})$

Sia $P=(x_P, y_P) \in \mathbb{K}^2$ $\quad (\ell, m) \neq (0\,0)$

e $W_1 = \mathcal{L}((\ell, m)) \leq \mathbb{K}^2$

$r = [P; W_1]$

$X \in r$ con $X=(x,y) \iff$

$$rk\begin{pmatrix} x-x_P & \ell \\ y-y_P & m \end{pmatrix} = 1 \iff$$

$$\boxed{m(x-x_P) = \ell(y-y_P)}$$

eq. della retta nel piano.

$n=3 \rightarrow$ in $AG(3, \mathbb{K})$. $\quad (\ell, m, n) \neq (0\,0\,0)$

$P=(x_P, y_P, z_P)$ $\quad W_1 = \mathcal{L}((\ell\ m\ n)) \leq \mathbb{K}^3$

$X=(x\ y\ z)$

$$rk\begin{pmatrix} x-x_P & \ell \\ y-y_P & m \\ z-z_P & n \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x-x_p & \ell \\ y-y_p & m \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x-x_p & \ell \\ z-z_p & n \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} y-y_p & m \\ z-z_p & n \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

3 equazioni di I grado

↓

solo 2 sono indipendenti (per il th. degli orlati).

<u>OSS</u>: In $AG(3,\mathbb{K})$ una retta è descritta da un <u>sistema lineare</u> sono ∞^2 punti!

piani in $AG(3,\mathbb{K})$.

$[P; W_2]$ con $P = (x_p \; y_p \; z_p)$

$W_2 = \mathcal{L}((\alpha_1 \; \alpha_2 \; \alpha_3), (\beta_1 \; \beta_2 \; \beta_3))$

con $rk \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{pmatrix} = 2$

eq. $\operatorname{rk}\begin{bmatrix} x-x_P & \alpha_1 & \beta_1 \\ y-y_P & \alpha_2 & \beta_2 \\ z-z_P & \alpha_3 & \beta_3 \end{bmatrix} = 2$

cioè $\det\left(\equiv \right) = 0$

$$(x-x_P)\begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} - (y-y_P)\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} +$$

$$(z-z_P)\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$$

Una equazione in 3 incognite

$\Rightarrow \infty^2$ soluzioni.

Retta per 2 punti

$n=2$ $\quad P=(x_P\ y_P)$ $\quad X \in r$

$\quad Q=(x_Q, y_Q).$ $\quad X=(x,y).$

$r = [P; \mathcal{L}((x_Q-x_P, y_Q-y_P))$

$$\begin{vmatrix} x-x_P & x_Q-x_P \\ y-y_P & y_Q-y_P \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-x_P)(y_Q-y_P) = (y-y_P)(x_Q-x_P)$$

$$\boxed{\frac{x-x_P}{x_Q-x_P} = \frac{y-y_P}{y_Q-y_P}}$$

$$\frac{x-3}{0} = \frac{y-2}{1}$$ → è la retta $x-3=0$

Se $n=3$ $\quad AG(3,\mathbb{K})$.

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} x-x_P & x_Q-x_P \\ y-y_P & y_Q-y_P \\ z-z_P & z_Q-z_P \end{pmatrix} = 1$$

equazione nella forma di rapporti uguali.

$$\boxed{\frac{x-x_P}{x_Q-x_P} = \frac{y-y_P}{y_Q-y_P} = \frac{z-z_P}{z_Q-z_P}}$$

Def: Sia $r = [P, W_1]$ una retta
Si dicono parametri direttori di r le componenti di un qualsiasi generatore di W_1.
In particolare se r è sotto forma di eq ai rapporti uguali i parametri direttori sono i denominatori.

Sia $AX = B$ un sistema lineare compatibile di rango $n-k$ in n incognite $\Rightarrow$ l'insieme delle soluzioni di $AX = B$ si scrive come $X_0 + Ker(A)$

con X_0 soluzione particolare.
Ma questo insieme corrisponde

esattamente ai punti del sottospazio lineare

$$[X_0 ; \mathrm{Ker}(A)]$$

di $AG(n, \mathbb{K})$.

Viceversa, dato un sottospazio lineare

$$S = [P ; W_K]$$

di $AG(n, \mathbb{K})$ possiamo sempre trovare un sistema lineare

$$AX = B$$

compatibile le cui soluzioni sono proprio le coordinate dei punti di S

<u>OSS</u>: Sia S un sottospazio lineare di eq. $AX = B$ e $S = [P, W]$.

ALLORA $W = \mathrm{Ker}(A)$ cioè

W consta dei vettori soluzione di $AX = \underline{0}$

le soluzioni del sistema lineare omogeneo associato ad $Ax = B$ sono il sottospazio di traslazione dello spazio (affine) delle soluzioni del sistema.

<u>Teorema</u>: In $AG(2, \mathbb{K})$ due rette disgiunte sono sempre parallele.

[DATA UNA RETTA r ed un punto P con $P \notin r$ $\exists!$ retta s con $P \in s$ ed $s \cap r = \emptyset$]

<u>DIM</u>: Siano $r: ax + by = c$

$s: a'x + b'y = c'$

se $r \cap s = \emptyset \Leftrightarrow$ il sistema $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

non ha soluzione.

$$1 \le rk\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \ne rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \le 2$$

$$rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2 \ \& \ rk\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1$$

ciò significa che

$$ax + by = 0$$

e

$$a'x + b'y = 0$$

sono equazioni proporzionali

$\Rightarrow$ esse hanno le stesse soluzioni

$\Rightarrow$ i sottospazi di traslazione (direzioni) di r e di s sono lo stesso $\Rightarrow r // s$

$\square$

<u>Def</u>: Due rette r ed s sono dette <u>sghembe</u> se non esiste un piano che le contenga entrambe.

Se $n \geq 3 \Rightarrow$ in $AG(n, \mathbb{K})$ ci sono rette sghembe.

Siano $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ tre vettori indipendenti in $V_n(\mathbb{K})$ e consideriamo le rette

$r = [P, \mathcal{L}(\bar{e}_1)]$ $\quad s = [P + \bar{e}_2, \mathcal{L}(\bar{e}_3)]$

osserviamo che se $\exists\, \pi = [X, V_2]$ piano con $r, s \subseteq \pi \Rightarrow$

$P \in \pi$, $P + \bar{e}_1 \in \pi$, $P + \bar{e}_2 \in \pi$, $P + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \in \pi$

$\Rightarrow \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \in V_2$ e questi 3 vettori sono indipendenti.

$\Rightarrow \dim V_2 > 2$ ASSURDO!

Oss: due rette incidenti sono contenute in un piano.

$$r = [P, \mathcal{L}(\bar{v}_1)] \Rightarrow [R, \mathcal{L}(\bar{v}_1)]$$

$$s = [Q, \mathcal{L}(\bar{v}_2)] = [R, \mathcal{L}(v_2)]$$

se $R = r \cap s \Rightarrow$

$$r, s \subseteq [R, \mathcal{L}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)]$$

che è un piano.

Similmente 2 rette parallele sono sempre contenute in un piano.

$$r = [P, \mathcal{L}(\bar{v}_1)]$$

$$s = [Q, \mathcal{L}(\bar{v}_1)]$$

$$\pi = [P, \mathcal{L}(\bar{v}_1, \overrightarrow{PQ})]$$

Due rette sghembe sono 2 rette che non sono parallele e non si incontrano.

Analiticamente $n=3$

$$r \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$$

con $rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = rk\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2$

$$s \begin{cases} a''x+b''y+c''z=d'' \\ a'''x+b'''y+c'''z=d''' \end{cases}$$

r ed s sono sghembe se.

1) non si intersecano $\Rightarrow AX=B$

ove $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} d \\ d' \\ d'' \\ d''' \end{bmatrix}$

non é compatibile.

$$rk(A|B) = rk(A)+1$$

2) non sono parallele

cioè le soluzioni di

$$(*) \begin{cases} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \end{cases} \quad A_1$$

e

$$(*') \begin{cases} a''x+b''y+c''z=0 \\ a'''x+b'''y+c'''z=0 \end{cases} \quad A_2$$

sono differenti ovvero

$(*)$ e $(*')$ non sono sistemi equivalenti. ovvero

$$\underset{\underset{3}{\parallel}}{rk\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}} \neq rk(A_1) = 2$$

$$\left[\begin{array}{l} rk(A) = rk\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 3 \\ rk(A|B) = rk(A)+1 = 4 \end{array} \right.$$