Data una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, é diagonalizzabile? Se sí trovare una base di autovettori per A di $\mathbb{K}^n$.

[Matrici simili possono rappresentare la medesima trasformazione lineare rispetto basi differenti.]

Un problema che si può porre é data una matrice A determinare l'insieme di tutte le matrici simili ad A.

→ Se A é diagonalizzabile questo insieme conterrá una matrice diagonale che é "la più semplice" matrice simile ad A.

Se non é diagonalizzabile → forme canoniche.

A non diagonalizzabile:

2 tipi di problema

1) $\exists\ \bar{\lambda}$ radice della eq. caratteristica di A con $\bar{\lambda} \notin \mathbb{K}$

$\Rightarrow \sum_{\lambda \in Spec(A)} m_a(\lambda) < n \Rightarrow \sum_{\lambda \in Spec(A)} m_g(\lambda) < n$

$\Rightarrow$ NON PUÒ ESISTERE UNA BASE DI $\mathbb{K}^n$ formata da autovettori per A

Es. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$

$x^2 + 1 = 0$ non ha radici in $\mathbb{R}$.

N.B.: Dato un campo $\mathbb{K}$ esiste sempre un campo $\overline{\mathbb{K}}$ con $\mathbb{K} \subseteq \overline{\mathbb{K}}$ e $\overline{\mathbb{K}}$ algebricamente chiuso cioè in $\overline{\mathbb{K}}$ ogni polinomio di grado ≥ 1 ha sempre almeno una radice

$\Rightarrow$ in $\overline{\mathbb{K}}$ ogni polinomio di grado almeno 1 si fattorizza in termini di primo grado e quindi un polinomio di grado n ha sempre n radici (contate con la debita molteplicità).

---

per induzione sul grado n.

1) Un polinomio di grado $n=1$ del tipo $(x-\alpha)$ ha una radice

2) Supponiamo $\forall$ polinomio di grado $n-1$ abbia $n-1$ radici.

Sia $f(x)$ un polinomio di grado n $\Rightarrow$ per ipotesi $\exists \alpha \in \overline{\mathbb{K}}$ tale che $f(\alpha)=0 \Rightarrow$ per Ruffini

$f(a) = (x-\alpha)\, g(x)$ con $\deg g(x) = n-1$

$\Rightarrow f(x)$ ha $1+(n-1)$ radici $= n$ radici $\square$

$\mathbb{C}$ = campo complesso è algebricamente chiuso
Teorema fondamentale dell'algebra.

ogni elemento di $\mathbb{C}$ lo rappresentiamo come $z = a + ib$ con la posizione $i^2 = -1$ e scrivendo il prodotto imponendo le usuali proprietà associative e commutative.

$\mathbb{C}$ lo posso anche costruire identificando

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$$

$$i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$$

ed usando somma e prodotto di matrici nel modo usuale nello s.vettoriale generato da queste ?

$$a+ib=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

1) $$i^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-1$$

2) $\forall\, X=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2,2}$, $\det X=a^2+b^2\neq 0$

se $(a,b)\neq(0,0)$

ogni elemento $\neq 0$ è invertibile.

$$(a+ib)(c+id)=$$

$$=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} +ac-bd & ad+bc \\ -bc-ad & -bd+ac \end{pmatrix}$$

$$=(ac-bd)+i(ad+bc)$$

3) definiamo $\|z\|^2=\det Z=a^2+b^2$

con $z=a+ib$

$$Z=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

4) l'inverso di un elemento in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ si può calcolare come l'inversa della matrice associata.

$$z^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}(a-ib) \qquad a,b\in\mathbb{R}$$

In particolare $\mathbb{C}$ è spazio vettoriale di dimensione 2 su $\mathbb{R}$

Def $z\in\mathbb{C}$ $\quad z=a+ib$

$\Rightarrow$ si dice complesso coniugato di z l'elemento $\boxed{\bar{z} := a-ib}$

$\mathrm{Im}(z)=b \leftarrow$ parte immaginaria

$\mathrm{Re}(z)=a \leftarrow$ parte reale

$\in\mathbb{R}$

$z\neq 0$

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}}$$

OSS: z è reale $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)=0$

questo è equivalente a dire

$z=\bar{z}$

Infatti $z = \bar{z} \Rightarrow a + ib = a - ib$
$\Rightarrow ib = -ib$ da cui $b = 0$

Matrici reali $\in \mathbb{R}^{n,n}$

Se DIAGONALIZZABILI $\Rightarrow \forall$ autovalore deve essere reale.

Def: Una matrice A é simmetrica se ${}^tA = A$

Teorema (della base spettrale)
Una matrice reale e simmetrica é sempre diagonalizzabile.

[Una matrice reale A é ortogonalmente diagonalizzabile $\Leftrightarrow A = {}^tA$]
↓
DIAGONALIZZABILE CON P diagonalizzante tale che ${}^tP = P^{-1}$

Teorema spettrale:

tutti gli autovalori di una matrice A reale e simmetrica sono reali.

DIM

OSS 1) Sia A una matrice $\in \mathbb{C}^{n,n}$ con autovalore λ e autovettore X tale che $AX = \lambda X$

$\Rightarrow \bar{X}$ è autovettore di $\bar{A}$ con autovalore $\bar{\lambda}$

[basta osservare che

$$\overline{a+bc} = \bar{a} + \bar{b} \cdot \bar{c}$$

$\forall a,b,c \in \mathbb{C}$] $\Rightarrow AX = \lambda X$ implica $\overline{AX} = \overline{\lambda X}$

da cui $\bar{A}\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$

il coniugio è un automorfismo di $\mathbb{C}$

per ipotesi $A = {}^tA$ (simmetrica)

$A = \bar{A}$ (reale).

Sia λ un autovalore di A ed $X \neq \underline{0}$ un suo autovettore di autovalore λ.

$$\lambda\,{}^tX\,\bar{X} = {}^t(AX)\,\bar{X} =$$

$$= {}^tX\,{}^tA\,\bar{X} = {}^tX\,A\,\bar{X} =$$

$A = {}^tA$

$$= {}^tX\,\bar{A}\,\bar{X} = {}^tX\,\overline{(AX)} = {}^tX\,\bar{\lambda}\,\bar{X}$$

$\bar{A} = A$

ho mostrato che

$$\boxed{\lambda\,{}^tX\,\bar{X} = \bar{\lambda}\,{}^tX\,\bar{X}}$$

se ${}^tX\,\bar{X} \neq 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

D'altro canto se $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow {}^t X \bar{X} = \sum_i x_i \bar{x}_i = \sum_i \|x_i\|^2$

ma $\|x_i\|^2 \geq 0$ ed è $0 \iff x_i = 0$

in quanto $x_j = a_j + i b_j \Rightarrow$

$$\|x_j\|^2 = a_j^2 + b_j^2$$

e almeno uno degli x_j è diverso da 0 perché $X \neq \underline{0}$

$\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$ $\square$

<u>N.B</u> $\lambda \in Spec(A) \Rightarrow m_g(\lambda) \geq 1$

quindi per ogni autovalore

$\exists$ almeno un autovettore.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 11 & 5 \\ 9 & 6 & 2 & 3 \\ 11 & 2 & 0 & 8 \\ 5 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Diagonalizzabilità di matrici reali e simmetriche.

↓

Teoria delle forme bilineari (prodotti scalari).

Cambiamenti di Base

1) forme lineari / funzioni lineari
2) forme bilineari

1) $f : V_n(\mathbb{K}) \longrightarrow V_n(\mathbb{K})$ lineare

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \text{—} \bar{e}_n)$

Associamo ad f una matrice A a partire dalla osservazione

$$f(\bar{e}_1) = a_{11}\bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2 + \text{—} + a_{n1}\bar{e}_n$$

$$f(\bar{e}_2) = a_{12}\bar{e}_1 + \text{—} + a_{n2}\bar{e}_n$$

$$|$$

$$f(\bar{e}_n) = a_{1n}\bar{e}_1 + \text{—} + a_{nn}\bar{e}_n$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} f(\bar{e}_1) & f(\bar{e}_n) \end{array}$$

dato $X = \sum x_i \bar{e}_i$

$f(X)$ ha come componenti

rispetto la base $\mathcal{B}$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

cosa accade se cambiamo base.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ | \\ \bar{e}_n \end{bmatrix}}_{E} = \underbrace{T}_{\text{righe di } T = \text{componenti di } \bar{e}_i \text{ rispetto la base } \mathcal{B}'} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{e}_1' \\ | \\ \bar{e}_n' \end{bmatrix}}_{E'}$$

Se X = vettore colonna che rappresenta $\bar{v}$ rispetto ad $\mathcal{B}$ e X' = vettore colonna che rappresenta $\bar{v}$ rispetto a $\mathcal{B}'$

$$\bar{v} = {}^tX E = {}^tX' E' = {}^tX T E'$$

$$\boxed{\begin{aligned} {}^tT X &= X' \\ X &= {}^tT^{-1} X' \end{aligned}}$$

$$X \longrightarrow \boxed{A\,\cdot} \longrightarrow X''$$

$X \hookrightarrow$ componenti di $\bar{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$

$X'' \hookrightarrow$ componenti di $\bar{v}$ rispetto $\mathcal{B}$.

$X = {}^tT^{-1}X'$

$X''' = {}^tT X''$

$X' =$ componenti di $\bar{v}$ rispetto $\mathcal{B}'$

X''' componenti di X'' rispetto $\mathcal{B}'$

$$ {}^tT(\underbrace{AX}_{X''}) = {}^tTA(\underbrace{{}^tT^{-1}X'}_{X}) = $$

$$ = ({}^tTA\,{}^tT^{-1})X' $$

la matrice che rappresenta f rispetto B' è $\boxed{A' = {}^tTA\,{}^tT^{-1}}$

matrici simili rappresentano "essenzialmente" [illegible]

$$\boxed{E = TE'}$$

$$\bar{v} = {}^tXE = {}^tX'E'$$

$$\parallel$$

$${}^tXTE' \quad \Rightarrow \quad {}^tXT = {}^tX'$$

$$X' = {}^tTX$$

$$X = {}^tT^{-1}X'$$

$$X'' = AX = A\,{}^tT^{-1}X'$$

rispetto ad E

$$X''' = {}^tTX'' = ({}^tTA\,{}^tT^{-1})X'$$

$$\parallel$$

$$X''' = A'X'$$

la stessa trasformazione lineare.

A diagonalizzabile $\Rightarrow$ troviamo una base tale che

$$D = A' = {}^{\mathcal{E}}T A {}^{\mathcal{E}}T^{-1}$$

---

forme bilineari

forma: applicazione $V_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$

funzione a valori nel campo.

Una forma bilineare è una funzione

$$f: V_n(\mathbb{K}) \times V_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

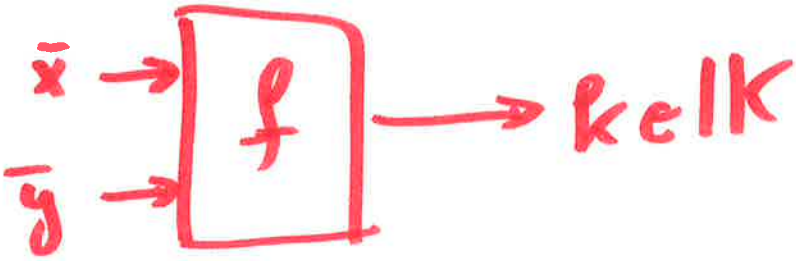
e che gode delle seguenti proprietà:

$$\forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V_n(\mathbb{K}) \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$$

$$f(\alpha\bar{u}+\beta\bar{v},\bar{w})=\alpha f(\bar{u},\bar{w})+\beta f(\bar{v},\bar{w})$$

$$f(\bar{u},\alpha\bar{v}+\beta\bar{w})=\alpha f(\bar{u},\bar{v})+\beta f(\bar{u},\bar{w}).$$

Una forma <u>bi</u>lineare è una forma che ha in input 2 vettori e che è lineare in entrambi gli ingressi.



Data $f(\bar{x},\bar{y})$ le funzioni

$$f(\bar{x},\cdot):\begin{cases} V_n(\mathbb{K})\to\mathbb{K}\\ \bar{y}\to f(\bar{x},\bar{y})\end{cases}$$

$$f(\cdot,\bar{y}):\begin{cases} V_n(\mathbb{K})\to\mathbb{K}\\ \bar{x}\to f(\bar{x},\bar{y})\end{cases}$$

sono lineari.

esempio

in $\mathbb{K}^2$ la forma

$$f(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) :=$$

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

DOMINIO $\mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2$

CODOMINIO $\mathbb{K}$

Forma bilineare.

Una forma bilineare è detta

<u>alternante</u> se $f(\bar{x}, \bar{y}) = -f(\bar{y}, \bar{x})$ $\forall \bar{x}, \bar{y}$

<u>simmetrica</u> (o <u>prodotto scalare</u>)

se $f(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{y}, \bar{x})$ $\forall \bar{x}, \bar{y}$

$$f: \begin{cases} \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} \longrightarrow xz + yt \end{cases}$$

Sia $f: V_n(\mathbb{K}) \times V_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineare e $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \,—\, \bar{e}_n)$ una base di $V_n(\mathbb{K})$.

Siano ora $\bar{x} = \sum_i x_i \bar{e}_i$ ed

$$\bar{y} = \sum_i y_i \bar{e}_i$$

CALCOLIAMO

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = f\left(\sum_i x_i \bar{e}_i, \sum_j y_j \bar{e}_j\right) =$$

$$= \sum_i f\left(x_i \bar{e}_i, \sum_j y_j \bar{e}_j\right) =$$

$$= \sum_i x_i f\left(\bar{e}_i, \sum_j y_j e_j\right) =$$

$$= \sum_i \sum_j x_i f(\bar{e}_i, y_j \bar{e}_j) =$$

$$= \sum_i \sum_j x_i y_j \boxed{f(\bar{e}_i, \bar{e}_j)}$$

La forma f è univocamente determinata dai valori che essa assume su $f(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$ con $1 \leq i, j \leq n$ e dalle componenti dei vettori $\bar{x}$ e $\bar{y}$

$$M = \left(f(\bar{e}_i, \bar{e}_j) \right)_{i,j=1}^{n}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

oss. $\boxed{f(\bar{x}, \bar{y}) = {}^t X M Y}$

M rappresenta f rispetto a $\mathcal{B}$.

#