Sistemi lineari

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

m equazioni in n incognite

$s \in \mathbb{K}^n$ con $s = (s_1 \ldots s_n)$

1) $\exists$ soluzione?

2) Se sì trovare le soluzioni

3) Quando le sol. non $\exists$ si può fare qualche cosa?

$\begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ NO

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ sì $\exists!$

$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$ sì

$(\alpha, -\alpha, -\alpha)$ sono sol.

$(1, -1, -1)$

(*) è descritto da m equazioni scalari

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{AX = B}$$ una equazione matriciale

Quando un sistema ammette soluzione?

Teorema di Rouché-Capelli.

$AX = B$ è compatibile

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A|B)$$

matrice incompleta

matrice completa.

<u>DIM</u>: Sia la matrice A scritta per colonne

$$A=(C_1 C_2 \text{---} C_n)$$

$$\Rightarrow AX = x_1 C_1 + x_2 C_2 + \text{---} + x_n C_n$$

dire che $AX=B$ è compatibile è equivalente a dire $\exists\, \alpha_1 \dots \alpha_n$ tali che

$$\alpha_1 C_1 + \text{---} + \alpha_n C_n = B$$
$$\|$$
$$AS \quad \text{con } S=(\alpha_1 \text{---} \alpha_n)$$

cioè che $\boxed{B \in \mathcal{L}(C_1 \text{---} C_n)}$

$B \in \mathcal{L}(C_1 \text{---} C_n) \Leftrightarrow \mathcal{L}(C_1 \text{---} C_n) =$

$= \mathcal{L}(C_1 \text{---} C_n\ B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dim \mathcal{L}(C_1 \text{---} C_n\ B) = \dim (C_1 \text{---} C_n)$

(in quanto $\mathcal{L}(C_1 \text{---} C_n) \leq \mathcal{L}(C_1 \text{---} C_n\ B)$)

$$\Leftrightarrow rk(A|B) = rk(A)$$
$$\overset{\parallel}{\dim \mathcal{L}(C_1 \ldots C_n\ B)} \qquad \overset{\parallel}{\dim \mathcal{L}(C_1 \ldots C_n)}$$

$\square$

N.B. Rouché-Capelli possiamo anche leggerlo considerando le applicazioni lineari.

DATO $AX=B$ definiamo

$$f_A \begin{cases} \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m \\ X \longrightarrow AX \end{cases}$$

DIRE che $AX=B$ ha soluzione é equiv. a dire $B \in \mathrm{Im} f_A$

(e le soluzioni sono le preimm. di B).

Ma noi sappiamo che

$$\mathrm{Im} f_A = \mathcal{L}(f_A(\bar{e}_1) \ldots f_A(\bar{e}_n))$$

é generato dall'immagine dei vettori di una base di $\mathbb{K}^n$.

In particolare se

$$\mathcal{B} = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{e}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{e}_2}, \dots \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{e}_n} \right)$$

$$f_A(\bar{e}_i) = C_i$$

← i-esima colonna di A

$$\operatorname{Im} f_A = \mathcal{L}(C_1 — C_n)$$

e $B \in \operatorname{Im} f_A = \mathcal{L}(C_1 — C_n) \iff$

$$\iff \mathcal{L}(C_1 — C_n) = \mathcal{L}(C_1 — C_n\ B)$$

e poi si continua come prima. $\square$

Quando un sistema lineare

$$AX=B$$

compatibile ammette una ed una sola soluzione?

Quando la funzione $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ é iniettiva. (B ha un'unica preimmagine). $\Leftrightarrow$

$$\operatorname{Ker} f_A = \{X \mid f_A(x) = \underline{0}\} =$$

$$= \{X \mid AX = \underline{0}\} = \{\underline{0}\}.$$

vuol dire che il rango della matrice A é uguale ad n.

In quanto A deve mandare una base di $\mathbb{K}^n$ in una base di $\operatorname{Im} f_A$ e quindi le colonne di A devono essere lin. indip.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ \quad\; y-z=1 \\ x+y+2z=0 \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\neq 0$ OK

$\exists !$ sol.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ \quad y-z=1 \\ x+y+2z=0 \\ x+2y \quad =1 \end{cases} \leftarrow 5 \text{ eq.}$$
$$x+2y+z=1$$

Def: Due sistemi lineari (compatibili) in n incognite

$$AX=B \quad e \quad A'X=B'$$

sono ~~compatibili~~ detti equivalenti se hanno il medesimo insieme di soluzioni.

Def Un sistema lineare $AX=B$ è detto di Cramer se $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ e $\det A \neq 0$

Teorema: Un sistema di Cramer ha sempre una ed una sola soluzione.

DIM: Sia $AX=B$ con $\det(A) \neq 0$

$\Rightarrow \exists\, A^{-1} \in GL(n, \mathbb{K})$ e

$$\underbrace{A^{-1}(AX)}_{=X} = A^{-1}B$$

quindi $A^{-1}B$ è soluzione del sistema.

Supponiamo ora S, S' soluzioni

$\Rightarrow \quad AS = B = AS'$ molt. a sx per A^{-1}

$$S = A^{-1}(AS) = A^{-1}B = A^{-1}(AS') = S'$$

$\rightarrow$ la soluzione è unica $\square$

DIM ALTERNATIVA.

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} A = \{\underline{0}\} \Rightarrow$

$$f_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

è iniettiva. Ma poiché il codominio ha la stessa dim. del dominio f_A è anche suriettiva $\Rightarrow \forall B \in \mathbb{K}^n \; \exists! S \in \mathbb{K}^n$ con $f_A(S) = B$ $\square$

OSS: Un sistema lineare è equivalente ad un sistema di Cramer $\Leftrightarrow$ esso ammette una ed una sola soluzione.

<u>Teorema</u>: Sia $AX=B$ un sistema lineare e siano

$$\begin{pmatrix} R_1' \\ \vdots \\ R_m' \end{pmatrix}$$ le <u>righe</u> della matrice completa.

[N.B → righe della matrice completa = equazioni del nostro sistema]

l'equazione i-esima è data da

$$R_i' \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(\overbrace{a_{i1}\ a_{i2} \ldots a_{in}}^{R}\ b_i) \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \_\_\_ + a_{in}x_n = b_i$$

Un sistema lineare ottenuto da $AX=B$ moltiplicando una riga per uno scalare $\neq 0$ oppure sommando ad essa una combinazione lineare delle rimanenti é equivalente al sistema lineare di partenza.

$AX=B$

$$(1) \quad \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} \underline{\alpha R_1} \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\alpha b_1} \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad \alpha \neq 0$$

Sia $s = (s_1 \text{ — } s_n)$ una soluzione di (1)

$$\Rightarrow R_1 \begin{pmatrix} s_1 \\ | \\ s_n \end{pmatrix} = b_1 \Rightarrow (\alpha R_1) \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \alpha b_1$$

$$R_2 \begin{pmatrix} s_1 \\ | \\ s_n \end{pmatrix} = b_2 \Rightarrow R_2 \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = b_2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$R_m \begin{pmatrix} s_1 \\ | \\ s_n \end{pmatrix} = b_m \Rightarrow R_m \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = b_m$$

quindi ogni soluzione di (1) é soluzione di (2)

viceversa, moltiplicando la I riga per α^{-1} si vede che ogni soluzione di (2) é soluzione di (1).

$$(3)\quad \begin{pmatrix} R_1+\sum_{i>1}\beta_i R_i \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1+\sum_{i>1}\beta_i b_i \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

ho sommato alla I equazione una c. lineare delle rimanenti.

Mostriamo che $\forall$ soluzione di (1) é soluzione di (3) e viceversa.

$s=(s_1 \text{---} s_n)$ soluzione

$$\Rightarrow R_1\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = b_1 \Rightarrow \left(R_1+\sum_{i>1}\beta_i R_i\right)\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = b_1+\sum_{i>1}\beta_i b_i$$

$$R_2\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = b_2 \Rightarrow R_2\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = b_2$$

$$\vdots$$

$$R_m\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = b_m \Rightarrow R_m\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = b_m$$

viceversa...

supponiamo

$$\left(R_1 + \sum_{i>1} \beta_i R_i\right)\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = b_1 + \sum_{i>1} \beta_i b_i$$

$$R_2 \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = b_2$$

$$\vdots$$

$$R_m \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = b_m$$

sommando alla prima riga R_1'

$$-\sum_{i>1} \beta_i R_i'$$

si vede che ogni ~~eq~~ soluzione di (3) è soluzione di (1)

$\square$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 5 \\ 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & -4 & -11 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -6 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = -11 + 6x_4 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = -x_4 \end{cases}$$
$$x_4 = x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \qquad x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 \qquad\qquad = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ho ottenuto che il mio sistema é equivalente a

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -x_3 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

NON c'é SOLUZIONE.

verificare che l'eliminazione gaussiana porta ad una equazione del tipo $0=1$ $\iff rk(A) \neq rk(A|B)$

perché avere una riga del tipo $(0\ 0 \text{———} 0\ 1)$ con la procedura di Gauss significa che l'ultima colonna (B) é indip. dalle precedenti. perché si ottiene una.

comb. lineare delle righe di A che dà $\underline{0}$ (i primi n zeri) ma che non dà vettor nullo in (A|B) quindi il rango di A deve essere minore del rango di A|B.

$$\begin{cases} kx + (k-1)^2 xy + z = k+3 \\ x - (k+2)y + kz = k-1 \\ 3x + ky = 6 \\ 6x + 2ky = 10 \end{cases}$$

$\varrho = 1$

N.B:

$rk(A) \leq rk(A|B) \leq rk(A)+1$

Insieme delle soluzioni di un sistema lineare compatibile.

Teorema: Sia $AX=B$ un sistema lineare compatibile.
Allora ogni soluzione $\bar{X}$ del sistema si puó scrivere come
$$\bar{X} = X_0 + Z$$
ove X_0 é una soluzione particolare del sistema fissata e Z é una soluzione del sistema omogeneo associato $AZ=\underline{0}$.

DIM: Sia $\bar{X} = X_0 + Z \Rightarrow$
$$A\bar{X} = AX_0 + AZ =$$
$$= B + \underline{0} = B$$
($\bar{X}$ é soluzione).

Supponiamo $\bar{X}$ soluzione $\Rightarrow$

$$\Rightarrow A\bar{X} - AX_0 = B - B = \underline{0}$$

$$\underset{A(\bar{X}-X_0)}{\shortparallel}$$

quindi $Z := \bar{X} - X_0$ é soluzione del sistema omogeneo associato e

$\bar{X} = Z + X_0$ $\square$

<u>Teorema</u>: Sia $AX=B$ un sistema lineare. Allora

S = insieme delle soluzioni di $AX=B$

é sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n \iff B = \underline{0}$

(cioé il sistema é <u>omogeneo</u>)

<u>DIM</u>: Se $B \neq \underline{0} \Rightarrow \underline{0} \notin S$ in quanto $A\underline{0} = \underline{0} \Rightarrow S$ non é sottospazio.

Supponiamo $B = \underline{0} \Rightarrow$

Siano y, y' due soluzioni

$$Ay = \underline{0} = Ay'$$

e consideriamo

$$A(\alpha y + \beta y') =$$

$$= \alpha Ay + \beta Ay' = \alpha \underline{0} + \beta \underline{0} = \underline{0}$$

$\Rightarrow S$ é sottospazio vettoriale $\square$

Def: Si dice che un sistema lineare compatibile $AX = B$ ha $\underline{\infty^t}$ soluzioni se

$$t = \dim \{X \mid AX = \underline{0}\} =$$

$$= \dim \operatorname{Ker} A$$

(ove $\operatorname{Ker} A := \{X \mid AX = \underline{0}\}$).

OSS: t é il numero di "gradi di libertà" = parametri per le soluzioni

OSS 2: Usando gli ultimi 2 teoremi noi vediamo che é sempre possibile descrivere tutte le soluzioni di un sistema lineare in termini di un vettore $x_0 \in S$ e di un sottospazio di $\mathbb{K}^n$ di dim t

→ possiamo costruire queste soluzioni a partire da $t+1$ vettori

x_0 + una base del sottospazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

Esempio
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + 1x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 + x_3 - x_4 \end{cases}$$

soluzione particolare

$$(-1, 2, 0, 0)$$

sol. sistema omogeneo associato

$$\{(0\ x_3 - x_4, x_3, x_4) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

$$= \mathcal{L}((0\,1\,1\,0), (0\,{-1}\,0\,1)).$$

$$S = (-1, 2, 0, 0) + \mathcal{L}((0\,1\,1\,0), (0\,{-1}\,0\,1))$$