Ranghi e dimensioni

- **Lemma**

Siano $V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \text{ — } \bar{e}_n)$ una sua base fissata.

Sia $(\bar{v}_1 \text{ — } \bar{v}_k)$ una sequenza di k vettori di $V_n(\mathbb{K})$ con $k \leq n$

e indichiamo con

a_{ij} le componenti del vettore $\bar{v}_i$

rispetto la base $\mathcal{B}$.

$$\bar{v}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{e}_j$$

Allora la sequenza $(\bar{v}_1 \text{ — } \bar{v}_k)$ é libera $\Leftrightarrow$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \text{—} & a_{1n} \\ | & & | \\ a_{k1} & \text{—} & a_{kn} \end{pmatrix}$$

contiene un minore $k \times k$ con determinante non nullo.

cioé $\iff rk(A) = K$

Se $(\bar{v}_1 \text{---} \bar{v}_k)$ legata $\Rightarrow rk(A) < K$.

$(\bar{v}_1 \text{---} \bar{v}_k)$ legata $\Rightarrow$ almeno uno di essi é c. lineare dei rimanenti

$\Rightarrow$ la riga corrispondente in A é c. lineare delle rimanenti righe di A $\Rightarrow$ OGNI SOTTOMATRICE QUADRATA CHE CONTIENE TALE RIGA NECESSARIAMENTE HA DET=0 PERCHÉ UNA SUA RIGA È C.L. DELLE ALTRE.

Es $\quad \bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{v}_3 \quad \bar{v}_3 = 2\bar{v}_1$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \text{---} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \text{---} & a_{2n} \\ 2a_{11} & 2a_{12} & \text{---} & 2a_{1n} \end{pmatrix}$$

Se $(\bar{v}_1 \text{---} \bar{v}_k)$ libera e $K \leq n$

$\Rightarrow$ se $K = n \Rightarrow$ necessariamente

~~[illegible]~~ $\Rightarrow$

le componenti di $(\bar{v}_1 — \bar{v}_n)$ rappresentano una base di $\mathbb{K}^n$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} a_{11} & — & a_{1n} \\ | & & | \\ a_{n1} & — & a_{nn} \end{pmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow rk(A) = n \longrightarrow$ fine.

<u>$K<n$</u> $\mapsto$ Teorema di completamento della base con $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 — \bar{e}_n)$

$\mathcal{B}' = (\bar{v}_1 — \bar{v}_K \; \bar{e}_{i_1} — \bar{e}_{i_{n-K}})$ BASE DI $V_n(\mathbb{K})$.

Scrivo le componenti di $\mathcal{B}'$.

$$A' = \left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & — & & & a_{1n} \\ a_{21} & — & & & a_{2n} \\ | & & & & | \\ a_{K1} & — & & & a_{Kn} \\ 0 \; 0 & 1 & 0 & — & 0 \\ 0 \; 1 & 0 & — & & 0 \\ 0 & — & & 0 \; 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{righe che corrispondono ai } \bar{v}_i \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{righe che corrispondono ad } \bar{e}_{i_j} \end{array}$$

$\det A' = \pm 1 \cdot \det(A'_{n i_n}) = \ldots = \pm \det$ di una matrice ottenuta da A' cancellando le ultime $n-k$ righe ed $n-k$ colonne $=$

$= \pm \det$ di una matrice ottenuta da A cancellando $(n-k)$ colonne.

$= \pm \det$ di un minore $k \times k$ di A e questo è $\neq 0$ perché A' rappresenta le componenti di una base rispetto un'altra e dunque $\det A' \neq 0$. $\rightarrow \square$

Esempio $\quad \mathbb{R}^5$

$$
\begin{matrix}
(1 & 2 & 0 & 0 & 0) \\
(0 & 1 & 1 & 0 & 0) \\
(0 & 0 & 1 & 0 & 0) \\
(0 & 0 & 0 & 1 & 0) \\
(0 & 0 & 0 & 0 & 1)
\end{matrix}
$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Def</u>: Il minore di A che si ottiene con $\det \neq 0$ si chiama anche <u>minore fondamentale</u>.

Teorema di Kronecker.

Sia A una matrice in $\mathbb{K}^{m,n}$.

$\Rightarrow \dim \mathcal{L}_R(A) = rk(A) =$

$= \dim \mathcal{L}_C(A)$

Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

una matrice.

$rk(A) = \rho \Rightarrow A$ contiene un minore M $\rho \times \rho$ con $\det M \neq 0$

$\Rightarrow$ le ρ righe intersecate da M sono linearmente indipendenti.

$\Rightarrow \dim \mathcal{L}_R(A) \geq \rho$

Se per assurdo $\dim \mathcal{L}_R(A) > \rho$

$\Rightarrow$ fra le righe di A ce ne sarebbero almeno $\rho + 1$ indipendenti.

$\Rightarrow$ prese queste $\rho+1$ righe si trova in esse un minore M' $(\rho+1)\times(\rho+1)$ con $\det M' \neq 0$

$\Rightarrow rk(A) \geq \rho + 1$ ↯ perché $rk(A) = \rho$ $\square$

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{matrix} \\
R_1 & \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{5} & 3 & 0 \end{pmatrix} \\
R_2 & \begin{pmatrix} 2 & 4 & 10 & 6 & 0 \end{pmatrix} \\
R_3 & \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{1} & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
R_4 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
R_5 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
R_6 & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5-2-1 = 2$$

$rk(A) = 3$

$\dim \mathcal{L}(\_\_\_) = 3$

BASE DELLO S. VETTORIALE DELLE RIGE È (R_1, R_3, R_4)

BASE DELLO SPAZIO DELLE COLONNE È (c_1, c_2, c_3)

Teorema degli orlati

per calcolare il rango di una matrice $n \times n$ a priori si devono considerare tutti i suoi possibili minori e poi guardare qual è il più grande con det $\neq 0$

→ OTTIMIZZAZIONE: se $\forall$ minore $K \times K$ ha det $= 0 \Rightarrow \forall$ minore $t \times t$ con $t > K$ avrà det $= 0$

$rk(A) = t \iff \exists$ minore $M \in \mathbb{K}^{t,t}$ di A con $\det M \neq 0$ ed ogni minore di ordine $(t+1) \times (t+1)$ ha det $= 0$

Teorema degli orlati:

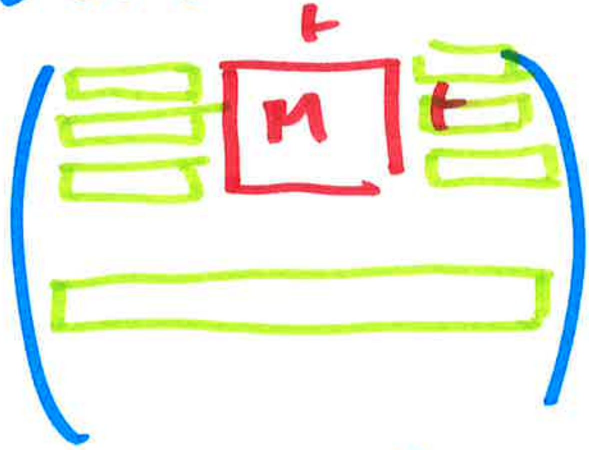
$rk(A) = t \iff \exists$ minore $M \in \mathbb{K}^{t,t}$ di A con $\det M \neq 0$ ed ogni minore di ordine $(t+1) \times (t+1)$ che contiene M ha det $= 0$.

DIM

Se $rk(A) = r \Rightarrow \forall$ minore $(r+1)\times(r+1)$ di A ha $\det = 0$ e quindi anche ogni minore $(r+1)\times(r+1)$ che contiene M.

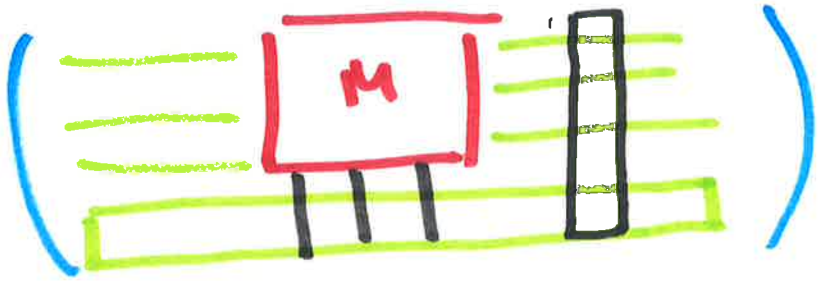
$\exists\, M$ minore di A con $\det(M) \neq 0$ ed ogni suo orlato (= minore $(r+1)\times(r+1)$ che lo contiene) ha $\det = 0$.

→ OSSERVIAMO CHE LA DIM. DELLO SPAZIO DELLE RIGHE DI A é almeno r e le righe che contengono M sono linearm. indip.

$A =$ 

Se fosse $rk(A) \geq r+1 \Rightarrow \exists$ una riga in A indipendente dalle r individuate da M.

costruiamo quindi una sottomatrice di A che contiene le t righe intercettate da M e questa ulteriore riga

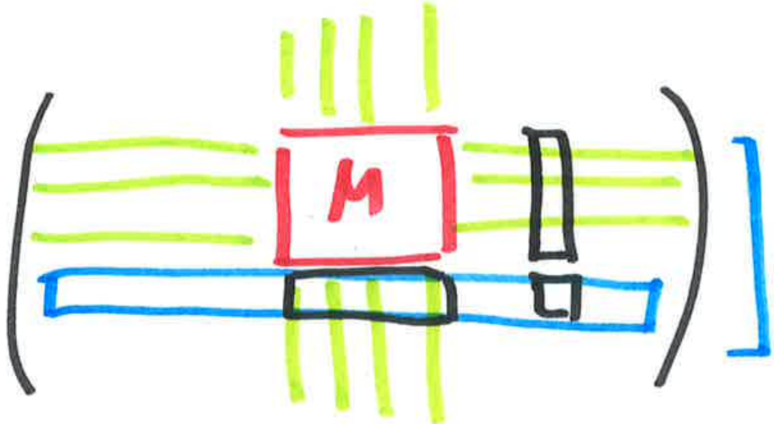
$A' =$ 

OSSERVIAMO CHE A' CONTIENE $t+1$ RIGHE INDIP. $\Rightarrow$ un minore $(t+1)\times(t+1)$ CON DET $\neq 0$

OSSERVO CHE LE t colonne intercettate da M sono indipendenti in A' $\Rightarrow$ in A' esiste una colonna che si può aggiungere a queste indi visto che lo sp. delle colonne di A' ha dim $t+1$ = dim. dello spazio delle righe di A'

Ma adesso abbiamo un minore $(t+1)\times(t+1)$ che contiene M ed ha det $\neq 0$

$\square$

$A =$ 

Il calcolo del rango richiede solo <u>di</u> studiare gli orlati di M.

Con Gauss si può ragionare manipolando le righe di una matrice A in modo tale da mantenere la indipendenza lineare.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

RREF
Row Reduced Echelon Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Def di Sistema lineare di m eq. in n incognite

è un insieme di m equazioni di I grado in n indeterminate.

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$a_{ij} \in \mathbb{K}$, $b_i \in \mathbb{K}$

una soluzione di (*) è una n-upla $(\alpha_1 — \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tale che sostituendo ai simboli

x_i $\quad 1 \le i \le n$ gli

scalari α_i tutte le eq. di (*) sono contemporaneamente soddisfatte.

DOMANDA: QUANDO È POSSIBILE E SE È POSSIBILE COME SI TROVANO LE SOLUZIONI?

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & — & a_{1n} \\ | & & | \\ a_{m1} & — & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ | \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{AX = B} \qquad f : \begin{cases} \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \\ X \to AX \end{cases}$$

$B \in \mathrm{Im}(f)$?