II Teorema di Laplace

Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ una matrice quadrata

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Gamma_{kj} = \sum_{j} a_{ij} (-1)^{k+j} \det(A_{kj})$$

$$= \begin{cases} \det A & \text{se } i = k \\ 0 & \text{se } i \neq k. \end{cases}$$

DIM: se $k \neq i$ il valore della funzione è il determinante di una matrice con 2 righe uguali (la i-esima riga è ripetuta 2 volte) $\Rightarrow$ è 0

$\square$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 5 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \leftarrow i=1 \\ \\ \leftarrow k=3 \\ \\ \end{array} \qquad \Gamma_{ij}=(-1)^{i+j}\det A_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{4} a_{1j}\Gamma_{3j} = a_{11}\Gamma_{31}+a_{12}\Gamma_{32}+$$

$$+a_{13}\Gamma_{33}+a_{14}\Gamma_{34}=$$

$$=1\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}+$$

$$+0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{array}{r} i=1 \rightarrow \\ \\ \\ k=4 \rightarrow \end{array} \cancel{\det}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \cancel{\det}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$a_{11}\Gamma_{41} + a_{12}\Gamma_{42} + a_{13}\Gamma_{43} + a_{14}\Gamma_{44} =$$

$$= (-1)\cdot \underline{\underline{1}} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \underline{\underline{2}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \underline{\underline{3}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \underline{\underline{0}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\det\begin{pmatrix} \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{2}} & \underline{\underline{3}} & \underline{\underline{0}} \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Def: Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$.
Si dice che A è invertibile se $\exists\, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ tale che

$$AB = BA = I_n.$$

Teorema: A è invertibile $\Leftrightarrow \det A \neq 0$
($\Leftrightarrow$ le righe/colonne di A sono una base di $\mathbb{K}^n$).

1) Teorema di Binét:
Siano $A, B \in \mathbb{K}^{n,n} \Rightarrow$

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

In particolare se $AB = I_n$

$$\Rightarrow \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(I_n) = 1 \Rightarrow \det(A) \neq 0$$

Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$A^{agg} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \cdots & \Gamma_{1n} \\ \Gamma_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ \Gamma_{n1} & \cdots & & \Gamma_{nn} \end{pmatrix}$$

bisogna calcolare n^2 determinanti

$$M = {}^tA^{agg} \cdot A = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{21} & \cdots & \Gamma_{n1} \\ \Gamma_{12} & \cdots & \Gamma_{ij} & \vdots \\ \vdots & & & \\ \Gamma_{1n} & \cdots & & \Gamma_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$m_{ij} = \underbrace{\begin{pmatrix} \Gamma_{1i} & \Gamma_{2i} & \cdots & \Gamma_{ni} \end{pmatrix}}_{i\text{-esima riga}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}}_{j\text{-esima colonna}} =$$

$$= \Gamma_{1i} a_{1j} + \Gamma_{2i} a_{2j} + \dots + \Gamma_{ni} a_{nj} =$$

$$= \begin{cases} \det A & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & & & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & 0 \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \det A \end{pmatrix}$$

$$= (\det A)\, I_n$$

Se $\det A = 0 \Rightarrow A$ non è invertibile

$\det A \neq 0 \Rightarrow \boxed{A^{-1} := (\det A)^{-1}\, A^{t\,agg}}$

e $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$

Il metodo indicato è l'unico per calcolare A^{-1}?

Metodo di Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det = 1$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right)$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right)$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{matrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$O(n)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{7}{6} \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{7}{6} \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ +\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix} \right.$$

facendo le op. del caso

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \quad \vdots \right.$$

1) Se abbiamo n vettori indip. di lunghezza $\underline{n}$ $\Rightarrow$ possiamo verificare se sono indip. mettoli a matrice e calc. il det.

2) Cosa succede se abbiamo $m < n$ vettori di $\mathbb{K}^n$?

3) Cosa succede se i nostri vettori non sono elementi di $\mathbb{K}^n$?

—

Matrice di cambiamento di Base

$V_n(\mathbb{K})$

uno sp. vettoriale di dim n sul campo $\mathbb{K}$. e siano

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1\ \bar{e}_2 \text{ — } \bar{e}_n)$ due sue basi
$\mathcal{B}' = (\bar{e}_1'\ \bar{e}_2' \dots \bar{e}_n')$

In particolare avremo che $\forall$ vettore di $\mathcal{B}'$ é c. lineare dei vettori di $\mathcal{B}$.

$$\overline{e}_1' = a_{11}\overline{e}_1 + a_{12}\overline{e}_2 + \ldots + a_{1n}\overline{e}_n$$

$$\overline{e}_2' = a_{21}\overline{e}_1 + a_{22}\overline{e}_2 + \ldots + a_{2n}\overline{e}_n$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{\overline{e}_n'}_{\text{vettori di } \mathcal{B}'} = \underbrace{a_{n1}\overline{e}_1 + a_{n2}\overline{e}_2 + \ldots + a_{nn}\overline{e}_n}_{\text{comb. lineari di vettori di } \mathcal{B}}$$

pongo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$E = \begin{pmatrix} \overline{e}_1 \\ \vdots \\ \overline{e}_n \end{pmatrix} \qquad E' = \begin{pmatrix} \overline{e}_1' \\ \vdots \\ \overline{e}_n' \end{pmatrix}$$

$$\boxed{AE = E'}$$

A é detta matrice di cambiamento di BASE DA $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ ed ha come righe le componenti dei vettori di $\mathcal{B}'$ rispetto a $\mathcal{B}$.

Supponiamo di avere un vettore

$$\bar v = v_1'\bar e_1' + v_2'\bar e_2' + \dots + v_n'\bar e_n' =$$

$$= (v_1' \; v_2' \dots v_n')\, E' = (v_1' \dots v_n')\begin{pmatrix}\bar e_1' \\ \vdots \\ \bar e_n'\end{pmatrix}$$

comp. di $\bar v$ rispetto $\mathcal{B}'$

$$E' = AE$$

$$\bar v = \boxed{(v_1' \dots v_n')\, A}\, E$$

componenti di $\bar v$ rispetto a $\mathcal{B}$.

In particolare $(v_1 \dots v_n)A$ conterrà le componenti del vettore $\bar v$ rispetto la base $\mathcal{B}$.

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = {}^tA \begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix}$$

componenti di $\bar v$ rispetto $\mathcal{B}'$.

componenti di $\bar v$ rispetto a $\mathcal{B}$

<u>Teorema</u>: le matrici di cambiamento di base sono invertibili.

$$\mathcal{B} \underset{C}{\overset{A}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}'$$

A: vettori di $\mathcal{B}'$ in termini di vettori di $\mathcal{B}$.

C: vettori di $\mathcal{B}$ in termini di vettori di $\mathcal{B}'$.

$$AE = E'$$
$$CE' = E$$
$$\Rightarrow (AC)E' = E'$$

ma AC rappresenta i vettori di E' rispetto i vettori di E' $\Rightarrow AC = I$

In particolare A, C sono invertibili.

Si indica con $GL(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{K}^{n,n} : \det A \neq 0\}$

GL = gruppo Generale Lineare.

è un gruppo non commutativo.

Rango di una matrice.

$A \in \mathbb{K}^{m,n}$

si dice **rango** di A $rk(A)$ l'intero che corrisponde all'ordine della più grande sottomatrice quadrata di A con $\det \neq 0$ (ed è 0 se tale matrice non $\exists$).

$$rk\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 6 & 4 & 2 \end{matrix} \end{pmatrix} = 2$$

$$rk\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

Teorema di Kronecker

Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ una matrice.

$\Rightarrow$ la dim dello spazio vettoriale sottospazio di $\mathbb{K}^n$ generato dalle righe di A è uguale alla dimensione del sottospazio di $\mathbb{K}^m$ generato dalle colonne di A e tali dimensioni coincidono con il rango di A.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 9 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}, \cancel{\begin{pmatrix}7\\5\\10\end{pmatrix}}, \cancel{\begin{pmatrix}9\\0\\0\end{pmatrix}}, \cancel{\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}}\right)$$

$\downarrow$

$$\mathcal{L}\big((1\,3\,7\,9\,2), (0\,1\,5\,0\,0), (0\,2\,10\,0\,0)\big) \subseteq \mathbb{K}^5$$