Formula di Grassmann

$V(\mathbb{K})$ spazio vettoriale

$\mathcal{U}, W \leq V(\mathbb{K})$

$$\boxed{\dim(\mathcal{U}+W) = \dim \mathcal{U} + \dim W - \dim \mathcal{U} \cap W}$$

→ Se $\mathcal{U} \cap W = \{\underline{0}\} \Rightarrow \mathcal{U} \oplus W$
e in questo caso l'unione di una base $\mathcal{B}_U$ di $\mathcal{U}$ e una base $\mathcal{B}_W$ di W è una base di $\mathcal{U} \oplus W$

→ OSS: Siano X una seq. di generatori di $\mathcal{U}$ ed Y una seq. di generatori di $W \Rightarrow$
$X \cup Y$ è una seq. di generatori

di $U+W$

$$U = \mathcal{L}(X) \subseteq \mathcal{L}(X \cup Y)$$
$$W = \mathcal{L}(Y) \subseteq \mathcal{L}(X \cup Y)$$

e ogni sottospazio che contiene U e W deve contenere $X \cup Y \Rightarrow$ contiene $\mathcal{L}(X \cup Y) \Rightarrow U+W = \mathcal{L}(X \cup Y)$ $\square$

$\dim U = h$

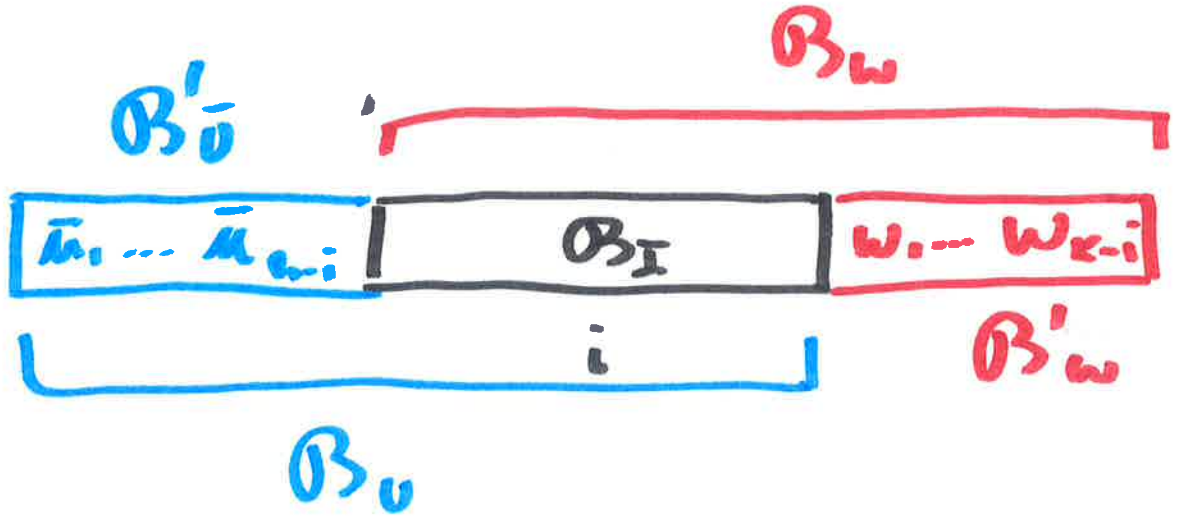
DIM Graßmann $\quad \dim W = k$

$U \cap W = I$ con $I \neq \{\underline{0}\}$.

Sia $B_I = (\bar{e}_1 — \bar{e}_i)$ una base di I; completiamo B_I a base di U aggiungendo $(\bar{u}_1 — \bar{u}_{h-i}) \subseteq U$

e a base di W aggiungendo.

$(\bar{w}_1 \ldots \bar{w}_{k-i}) \subseteq W$ elementi di W



osserviamo che

1) $$\mathcal{B}'_U \cup \mathcal{B}_I \cup \mathcal{B}'_W$$

contiene $h-i+i+k-i =$

$$= h+k-i$$

vettori

2) $\mathcal{B}'_U \cup \mathcal{B}_I \cup \mathcal{B}'_W = \mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$

e quindi è un sistema di generatori per

$$U+W$$

4) DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE SI HA UNA SEQ LIBERA

$$(\bar{u}_1 — \bar{u}_{h-i}\ \bar{e}_1 — \bar{e}_i\ \bar{w}_1 — \bar{w}_{k-i})$$

per assurdo supponiamo

$$\exists\,(\alpha_1 — \alpha_{h-i}, \gamma_1 — \gamma_i, \beta_1 — \beta_{k-i}) \neq \underline{0}$$ tale che

$$\alpha_1\bar{u}_1 + — + \alpha_{h-i}\bar{u}_{h-i} + \gamma_1\bar{e}_1 + — + \gamma_i\bar{e}_i + \beta_1\bar{w}_1 + — + \beta_{k-i}\bar{w}_{k-i} = \underline{0}$$

NON PUÓ ESSERE $\alpha_j = 0\ \forall j$ perché altrimenti quanto rimane sarebbe una c. lin. a coeff. non tutti 0 di vettori di $\mathcal{B}_W$ che di $\underline{0}$ ↯

$$\bar{u} = \alpha_1\bar{u}_1 + — + \alpha_{h-i}\bar{u}_{h-i} \in U$$

$$\bar{u} \neq \underline{0}$$

5) $\boxed{\bar{u} = -(\gamma_1\bar{e}_1 + \_\_ + \gamma_i\bar{e}_i + \beta_1\bar{w}_1 + \_\_ + \beta_{k-i}\bar{w}_{k-i})}$

$\in \underline{\underline{U}}$

é comb. lineare di vettori di $\mathcal{B}_W$ $\Rightarrow$ é un vettore di $\underline{\underline{W}}$

$\Rightarrow \bar{u} \in U \cap W = I$

ma I é generato da

$\mathcal{B}_I = (\bar{e}_1 \_\_ \bar{e}_i)$

$\Rightarrow \bar{u} = \delta_1\bar{e}_1 + \_\_ + \delta_i\bar{e}_i$

con $(\delta_1 \_\_ \delta_i) \neq (0 \_\_ 0)$

$\delta_1\bar{e}_1 + \_\_ + \delta_i\bar{e}_i = -(\gamma_1\bar{e}_1 + \_\_ + \gamma_i\bar{e}_i + \dots + \beta_1\bar{w}_1 + \_\_ \beta_{k-i}\bar{w}_{k-i})$

$$\left[(\gamma_1+\delta_1)\bar{e}_1 + (\gamma_2+\delta_2)\bar{e}_2 + \dots + (\gamma_i+\delta_i)\bar{e}_i + \underline{\underline{\beta_1}}\bar{w}_1 + \_\_ + \underline{\underline{\beta_{k-i}}}\bar{w}_{k-i} = \underline{0}\right]$$

6)
Quella in blu é una c. lineare dei vettori di $\mathcal{B}_W$ che dà $\underline{0}$

$$\Rightarrow (\gamma_1+\delta_1)=(\gamma_2+\delta_2)=\dots=(\gamma_i+\delta_i)=0$$

$$\beta_1=\beta_2=\dots=\beta_{k-i}=0$$

$\Rightarrow$ $\underline{0}$ é c. lineare del tipo

$$\alpha_1\bar{u}_1+\_\_\_+\alpha_{h-i}\bar{u}_{h-i}+\gamma_1\bar{e}_1+\dots+\gamma_i\bar{e}_i=\underline{0}$$

cioé é c.lineare dei vettori di una base di $\mathcal{U}$ con almeno un $\alpha_j\neq 0$ ↯ perché $\mathcal{B}_U$ é libera

NE SEGUE CHE

$\mathcal{B}'_U \cup \mathcal{B}_I \cup \mathcal{B}'_W$ é libera

$\Rightarrow$ BASE

$$\Rightarrow \dim \mathcal{U}+W=|\mathcal{B}'_U|+|\mathcal{B}_I|+|\mathcal{B}'_W|$$

$$=\dim\mathcal{U}+\dim W-\dim \mathcal{U}\cap W. \quad \square$$

7) Esercizi del tipo:

Siano $U, W \leq V_n(\mathbb{K})$

con $\dim U = h$

$\dim W = K$

Trovare le possibili dimensioni di $U+W$ o $U \cap W$.

$$\max\begin{cases}\dim U \\ \dim W\end{cases} \leq \dim U+W \leq \min\begin{cases} n \\ \dim U + \\ \dim W\end{cases}$$

$$\max\begin{cases} 0 \\ \dim U + \dim W \\ -n\end{cases} \leq \dim U \cap W \leq \min\begin{cases}\dim U \\ \dim W\end{cases}$$

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W) \geq$$

$$\geq \dim U + \dim W - n$$

perché $\dim(U+W) \leq n$

<u>ESEMPIO</u>: In $\mathbb{R}^{5,2}$ siano

$U, W \subseteq \mathbb{R}^{5,2}$ con

$\dim U = 3$ $\dim W = 8$

si calcolino le possibili dimensioni di $U \cap W$ e $U+W$

$$8 \leq \dim(U+W) \leq 10 = \min(11, 10)$$

$$\underset{\substack{\parallel \\ 1}}{11-10} \leq \dim(U \cap W) \leq 3$$

In particolare U e W non possono essere in somma diretta.

OSS Se $\dim \mathcal{U} + \dim W > n$

$\Rightarrow$ non é possibile che $\mathcal{U} \oplus W$

$\mathcal{U}, W \subseteq \mathbb{R}^{5,2}$ $\dim \mathcal{U} = 8$, $\dim W = 3$

$\Rightarrow$ $\boxed{1} \leq \dim \mathcal{U} \cap W \leq \boxed{3}$

$\boxed{8} \leq \dim \mathcal{U} + W \leq \boxed{10}$

Trovare sottospazi che soddisfino le limitazioni.

$\mathcal{U}, W$: $\dim \mathcal{U} \cap W = 1$

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 — \bar{e}_{10})$ BASE DI V

$\dim \mathcal{U} \cap W = 1 \Leftrightarrow \dim \mathcal{U} + W = 10$

$\mathcal{U} = \mathcal{L}(\bar{e}_1 — \bar{e}_8)$ $W = \mathcal{L}(\bar{e}_8\ \bar{e}_9\ \bar{e}_{10})$

$\dim \mathcal{U} \cap W = 3 \Leftrightarrow \dim \mathcal{U} + W = 8$

$\Leftrightarrow W \subseteq \mathcal{U}$

$\mathcal{U} = \mathcal{L}(\bar{e}_1 — \bar{e}_8)$, $W = \mathcal{L}(\bar{e}_1\ \bar{e}_2\ \bar{e}_3)$

Come verificare se una seq. di n vettori in $\mathbb{K}^n$ é libera o no

Determinante di una matrice quadrata.

Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ quadrata di ordine n.
poniamo A_{ij} il minore (= sottomatrice) ottenuto cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna da A. $A_{ij} \in \mathbb{K}^{n-1,n-1}$

- Se $n=1 \Rightarrow A=(a_{11})$

$$\det(A) := a_{11}$$

- Se $n>1$ supponiamo di sapere calcolare i determinanti per tutte le matrici di ordine $(n-1)\times(n-1)$

poniamo $\Gamma_{ij} := (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$

$\forall i$ fissato sia

$$\boxed{\begin{aligned} \det_i A &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Gamma_{ij} = \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A_{ij}) \end{aligned}}$$

Il teorema di Laplace garantisce che il det A non dipende dall'indice $1 \leq i \leq n$ selezionato.

$A \in \mathbb{K}^{1,1} \Rightarrow A = (a_{11}) \Rightarrow \det A = a_{11}$

$A \in \mathbb{K}^{2,2} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \det A = a_{11} \Gamma_{11} + a_{12} \Gamma_{12} =$$
$$= a_{11} (-1)^2 a_{22} + a_{12} (-1)^3 a_{21}$$
$$= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$A \in \mathbb{K}^{3,3} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11}\Gamma_{11} + a_{12}\Gamma_{12} + a_{13}\Gamma_{13} =$$

$$= a_{11}(-1)^2 \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} +$$

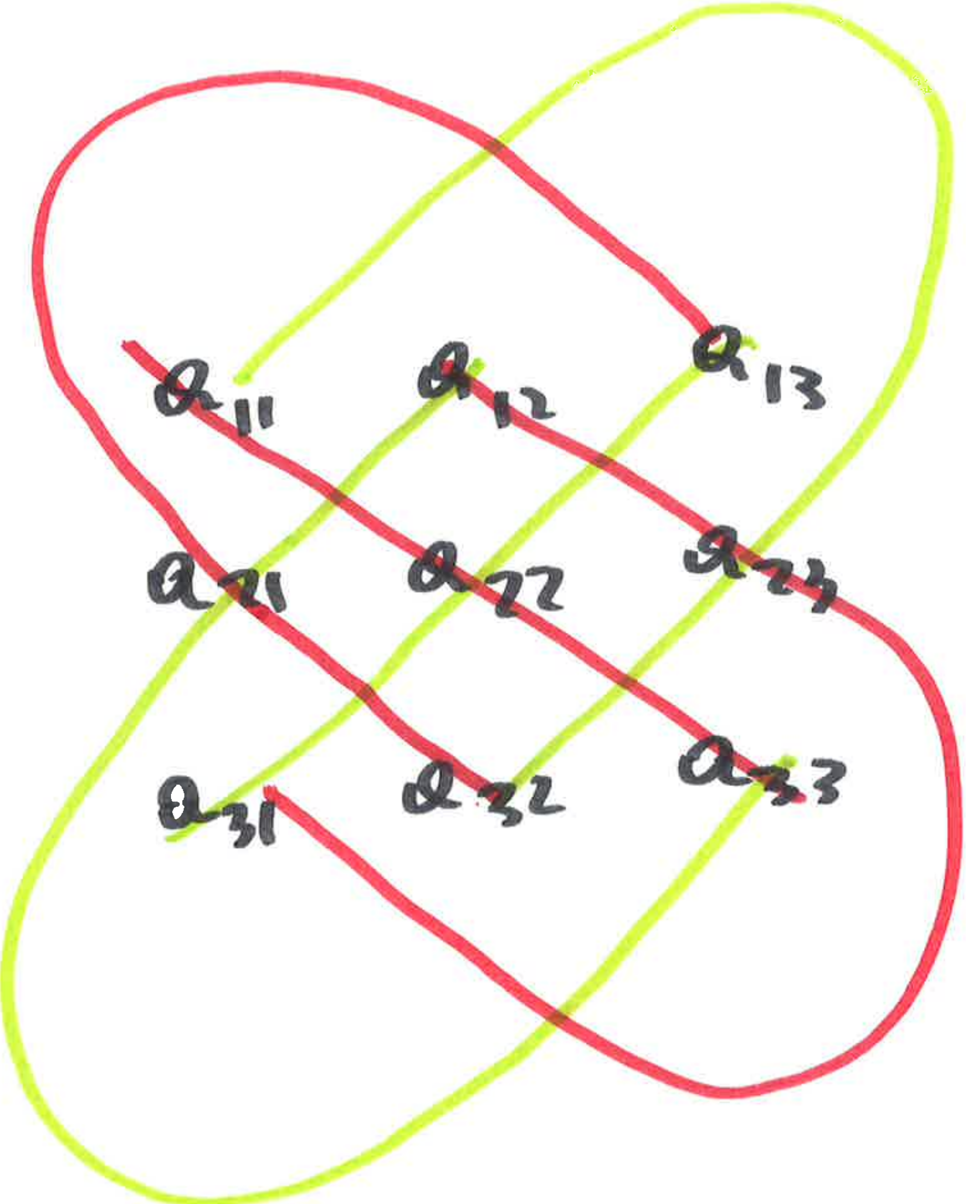
$$+ a_{12}(-1)^3 \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} +$$

$$+ a_{13}(-1)^4 \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} +$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$



$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$\underline{n=4}$ → 4 determinanti di matrici 3x3

↓

$\forall$ 3x3 si calcolano 3 determinanti di 2x2

↓

$\forall$ 2x2 si calcolano 2 det. di 1x1

DOVETE CALCOLARE 4! DETERMINANTI

→ per matrici nxn si devono calcolare con Laplace n! determinanti.

proprietà di det A. $A \in \mathbb{K}^{n,n}$

1) $\det A = \det {}^tA$

2) Se A contiene una riga/colonna di 0 $\Rightarrow \det A = 0$

3) Se si scambiano fra loro 2 righe (colonne) di A $\Rightarrow$ il determinante cambia di segno.

4) Sia $A = (C_1\ C_2 \dots C_m)$ e supponiamo V un vettore colonna di lunghezza m.

$$\Rightarrow \det(C_1 + V\ C_2 \dots C_m) =$$

$$= \det(C_1\ C_2 \dots C_m) + \det(V\ C_2 \dots C_m)$$

No $\cancel{\det(A+B) = \det A + \det B}$

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix} = 1$$

$$\det\begin{pmatrix}1+3 & 0\\ 2+4 & 1\end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}3 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix} =$$

$$= 4$$

5) $\det I_n = 1$

6) $\det(\alpha C_1\ C_2 \dots C_m) =$

$$= \alpha \det(C_1 \text{———} C_m)$$

<u>Teorema</u> $\det A = 0 \iff$ le colonne (righe) di A sono un sistema legato.

$$A' \xleftarrow[\text{2 colonne}]{\text{Scambiare}} A \quad \Rightarrow \det A = -\det A'$$

A) se in A ci sono 2 colonne uguali $\Rightarrow \det A = -\det A \Rightarrow$

$$\Rightarrow \det A = 0$$

B) Se si somma ad una colonna di A un'altra colonna.

$$(C_1 \dots C_k \dots C_n)$$

$$\det(C_1 + C_k \dots C_k \dots C_n) =$$

$$= \det(C_1 \dots C_k \dots C_n) + \det(\underline{C_k} \dots \underline{C_k} \dots C_n) =$$

$$= \det(C_1 \dots C_k \dots C_n)$$

il determinante non varia.

c) Se si somma ad una colonna di A una c. lineare delle rimanenti $\Rightarrow$ il det. non varia.

$$\det\left(C_1+\sum_{i>1}\alpha_i C_i \;\; C_2 \dots \;\; C_n\right) =$$

$$= \det(C_1 \dots \;\; C_n) +$$

$$+ \sum_{i>1} \alpha_i \det(C_i \; C_2 \dots \; C_n)$$

sono tutti $=0$ perché ci sono colonne ripetute

$$= \det A$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \; a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

perché

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \det\begin{pmatrix} 1 & & \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \; a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11} a_{22} \det\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & a_{33} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 8$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 0 & -10 & -12 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -10 & -12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\nearrow$$

$$\det = 1 \cdot 1 \cdot 8 = 8$$

<u>Teorema</u>: det é l'unica funzione $\mathbb{K}^{n,n} \to \mathbb{K}$ tale che $\det I_n = 1$, scambiando 2 righe in A il det. cambia di segno e il det. della matrice in cui

una riga si scrive come c. lineare di 2 vettori è la c. lineare delle ~~dette~~ 2 matrici che hanno come quella riga esattamente i vettori dati:

$$\det\begin{pmatrix}1&1&0\\2&3&5\\0&7&6\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&5\\0&7&6\end{pmatrix}+$$
$$+\det\begin{pmatrix}0&1&0\\2&3&5\\0&7&6\end{pmatrix}$$

$$(1\,1\,0)=(1\,0\,0)+(0\,1\,0)$$

$$\det\begin{pmatrix}1&1&0\\2&3&5\\0&7&6\end{pmatrix}=2\det\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&7&6\end{pmatrix}+$$
$$+3\det\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&7&6\end{pmatrix}+$$
$$5\det\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&7&6\end{pmatrix}$$

$$(2\,3\,5)=2(1\,0\,0)+3(0\,1\,0)+5(0\,0\,1)$$

COROLLARIO: Se le righe di A sono lin. dipendenti ⇒ ∃ una matrice A' in cui c'è una riga di 0 ottenuta.

sommando ad essa una c. lineare
delle rimanenti righe di A
(e le righe rimanenti sono
quelle di A) $\Rightarrow \det(A) = \det(A') = 0$