Siano $V(\mathbb{K})$, $W(\mathbb{K})$ due spazi vettoriali e $f: V \to W$ una applicazione lineare.

$$\forall \bar{u}, \bar{v} \in V: \ f(\alpha \bar{u} + \beta \bar{v}) = \alpha f(\bar{u}) + \beta f(\bar{v})$$

- morfismi di spazi vettoriali.

- def f é detta <u>isomorfismo</u> $f: V \to W$ se f é lineare e biiettiva.

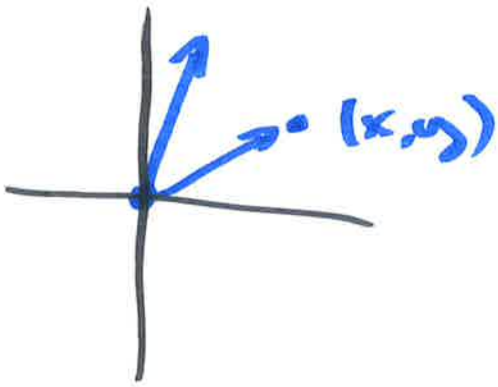
→ osserviamo che allora $\exists f^{-1}: W \to V$ lineare e biiettiva.

$\forall \bar{x}, \bar{y} \in W, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$\exists! \ \bar{a}, \bar{b} \in V$ tali che $f(\bar{a}) = \bar{x}$, $f(b) = \bar{y}$

$$f^{-1}(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y}) := \alpha \bar{a} + \beta \bar{b}$$

Spazio vettoriale delle "frecce" $\longleftrightarrow$ $\mathbb{R}^2$



$\longrightarrow$ (x,y)

N.B. Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale f.g. e $\mathcal{B}=(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una sua base.
ALLORA LA FUNZIONE

$$f_{\mathcal{B}}: \begin{cases} V \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ \bar{v} = \alpha_1\bar{e}_1+\dots+\alpha_n \bar{e}_n \longrightarrow (\alpha_1 \dots \alpha_n) \end{cases}$$

che associa ad ogni vettore la n-upla delle sue componenti rispetto a $\mathcal{B}$ é un isomorfismo □

Lemma di Steinitz.

$$\begin{array}{ccc}
\text{Sequenza di generatori} & \geq & \text{Sequenza libera} \\
\Big\downarrow \text{scarti successivi} & & \Big\downarrow \text{aggiungendo vettori} \\
\text{Sequenza libera di generatori o } \emptyset & & \text{Sequenza di generatori.}
\end{array}$$

Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ finitamente generato e siano $A=(\bar{a}_1 — \bar{a}_m)$

$B=(b_1 —— b_n)$

rispettivamente una sequenza libera di vettori di V ed una sua sequenza di generatori $\Rightarrow \boxed{m \leq n}$

A libera m — B generatori n vettori

<u>DIM</u>

Si ragiona per assurdo.

Supponiamo $m > n$

$A = (\bar{a}_1 \text{ — } \bar{a}_m)$ libera

$B^0 := (\bar{b}_1 \text{ — } \bar{b}_n)$ generatori

$\bar{a}_1 \in V \Rightarrow \exists\, \alpha_{11}\, \alpha_{12} \dots \alpha_{1n} \in \mathbb{K}$

tali che $\bar{a}_1 = \alpha_{11}\bar{b}_1 + \alpha_{12}\bar{b}_2 + \dots + \alpha_{1n}\bar{b}_n$

ma A é libera $\Rightarrow$ almeno uno degli

$\alpha_{1i} \neq 0$ perché altrimenti $\bar{a}_1 = \underline{0}_V$

DICIAMO $\alpha_{11} \neq 0 \Rightarrow$

$$\bar{b}_1 = \alpha_{11}^{-1}(\bar{a}_1 - \alpha_{12}\bar{b}_2 \dots - \alpha_{1n}\bar{b}_n)$$

$B^1 := (\bar{a}_1\, \bar{b}_2 \text{ — } \bar{b}_n)$

OSSERVO che $\mathcal{L}(B^1) = \mathcal{L}(B^0)$

infatti se $\bar{v} \in \mathcal{L}(B^0) \Rightarrow$

$\bar{v} = \beta_1\bar{b}_1 + \beta_2\bar{b}_2 + \dots + \beta_n\bar{v}_n$

ma $\bar{b}_1 = \alpha_{11}^{-1}(\bar{a}_1 - \dots)$

$\Rightarrow \bar{v} = \beta_1 \alpha_{11}^{-1}(\bar{a}_1 - \dots) + \beta_2 \bar{v}_2 + \dots$

$\Rightarrow \bar{v} \in \mathcal{L}(B^1) \Rightarrow \mathcal{L}(B^0) \subseteq \mathcal{L}(B_1)$

Viceversa ~~se~~ $\bar{a}_1 \in \mathcal{L}(B^0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{a}_1 \in \mathcal{L}(B^0 \cup \{\bar{a}_1\}) =$

perchè $= \mathcal{L}(B^1)$
scarti successivi.

$\mathcal{L}(B_1) \subseteq \mathcal{L}(B_0)$.

$$\begin{matrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \text{———} & \bar{a}_m \\ \downarrow & & & \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \dots & \bar{b}_n \end{matrix}$$

$B^1 = (\bar{a}_1 \, \bar{b}_2 \dots \bar{b}_n)$

$A = (\bar{a}_1 \, \bar{a}_2 \text{ ——— } \bar{a}_m)$

ragioniamo sul secondo vettore di A, cioè $\bar{a}_2$

B^2 é seq. di generatori $\Rightarrow$

$\exists\ \gamma_1, \alpha_{22}\ \alpha_{23} \dots \alpha_{2n}$ tali che

$$\bar{a}_2 = \gamma_1 \bar{a}_1 + \alpha_{22} \bar{b}_2 + \dots + \alpha_{2n} \bar{b}_n$$

OSSERVIAMO CHE NON PUÓ ESSERE

$$\alpha_{22} = \alpha_{23} = \dots = \alpha_{2n} = 0$$

perché altrimenti $\bar{a}_2 = \gamma_1 \bar{a}_1$
ed A non sarebbe libera

Supponiamo $\alpha_{22} \neq 0 \Rightarrow$

$$\bar{b}_2 = \alpha_{22}^{-1} (\bar{a}_2 - \gamma_1 \bar{a}_1 - \alpha_{23} \bar{b}_3 \dots)$$

stesso ragionamento di prima

$B^2 = (B^1 \setminus \{\bar{b}_2\}) \cup \bar{a}_2$ é
una seq. di generatori.

$$(\bar{a}_1\ \bar{a}_2\ \bar{b}_3 \text{———} \bar{b}_n)$$

$(\bar{a}_1\, \bar{a}_2\, b_3 \text{ —— } b_n)$.

$$\bar{a}_3 = \gamma_1' \bar{a}_1 + \gamma_2' \bar{a}_2 + \alpha_{33} \bar{b}_3 + \text{——}$$

si ricava che $\alpha_{33} = \alpha_{34} = \dots = \alpha_{3n} = 0$
é impossibile perché altrimenti
A legata.

Supponiamo $\alpha_{33} \neq 0 \rightarrow$ sostituiamo
$\bar{b}_3$ con $\bar{a}_3$ e otteniamo

$B^3 = (\bar{a}_1\, \bar{a}_2\, \bar{a}_3\, \bar{b}_4 \text{ —— } b_n)$

sequenza di generatori.

Dopo n passaggi abbiamo

$A = (\bar{a}_1\, \bar{a}_2 \text{ —— } \bar{a}_m\, \bar{a}_{n+1} \text{ — } a_m)$

$B^n = (\bar{a}_1\, \bar{a}_2 \text{ —— } a_n) \qquad m > n$

Ma B^n sequenza di generatori.

$\Rightarrow \bar{a}_{n+1} \in A$ si scrive come

$\bar{a}_{n+1} \in \mathcal{L}(B^n) \Rightarrow \bar{a}_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{a}_i$

$\Rightarrow$ almeno un vettore di A é comb. lineare dei rimanenti $\Rightarrow$ A é legata
$\Downarrow$
ASSURDO

Deve essere $m \leq n$ $\square$

IDEA: scambiare i vettori fra seq. libera e seq. di generatori sino a che non si ottiene una seq. di generatori formata da vettori della seq. libera.

$\rightarrow$ si ottiene l'assurdo se $m > n$.

CONSEGUENZE DI STEINITZ.

COROLLARIO: Sia $V(\mathbb{K})$ uno s. vett f.g.

1) Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi di $V(\mathbb{K})$

$\Rightarrow |\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$ e tale numero é

detto dimensione di $V(\mathbb{K})$.

$\dim V(\mathbb{K}) := n$

---

p: Sia $m = |\mathcal{B}|$, $n = |\mathcal{B}'|$.

$\left.\begin{array}{l}\mathcal{B} \text{ di generatori} \\ \mathcal{B}' \text{ libera}\end{array}\right] \Rightarrow m \geq n$

$\left.\begin{array}{l}\mathcal{B} \text{ libera} \\ \mathcal{B}' \text{ di generatori}\end{array}\right] \Rightarrow n \geq m$

$\Rightarrow m = n$

In particolare il codominio dell'isom.

$V(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}^n$

e associa ad ogni vettore di $V(\mathbb{K})$

le sue componenti rispetto una

base NON dipende dalla base fissata.

per indicare uno spazio vett.
di dimensione n sul campo $\mathbb{K}$
scriveremo $V_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^n$

Es. $\{a+bx+cx^2 \mid a,b,c \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^3$

$\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ BASE

2) Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno s. vett. di
dim $= n$ $\Rightarrow$
NESSUN INSIEME DI m VETTORI
CON $m<n$ é un insieme di
GENERATORI e nessuna sequenza
di $h>n$ vettori é libera.

DIM: Se ci fosse un sistema di $m<n$
vettori che genera V_n $\Rightarrow$
esso avrebbe meno vettori di
una seq. libera (BASE) ↯
Se ci fosse una seq. libera di $h>n$
vettori $\Rightarrow$ essa avrebbe più vettori di

un sistema di generatori (BASE) e

ESERCIZI

→ Trovare un sistema di 2 generatori per $\mathbb{R}^4$.

→ R: NON ESISTE $2<4$

Trovare una seq. libera di 4 vettori in $\mathbb{R}^2$.

→ R: NON ESISTE $4>2$

Trovare un sistema di 4 GENERATORI IN $\mathbb{R}^2$.

R: $((1\,0), (0\,1), (1\,1), (2\,3))$

3+4) Sia G un sistema di generatori per $V_n(\mathbb{K})$. sequenza

Se $|G| = n \Rightarrow G$ é libera e quindi BASE.

Sia $\mathcal{G}$ una seq. libera di n vettori in $V_n(\mathbb{K})$. ALLORA $\mathcal{G}$ é una seq. di generatori e dunque BASE

<u>Es.</u>

$$((1\,1\,1),(0\,1\,1),(0\,0\,1)) \subseteq \mathbb{R}^3$$

é base?

$$\alpha(1\,1\,1)+\beta(0\,1\,1)+\gamma(0\,0\,1)=(0\,0\,0).$$

$$(\alpha \;\; \alpha+\beta \;\; \alpha+\beta+\gamma)=(0\,0\,0)$$

$$\alpha=0 \quad \beta=0 \quad \gamma=0$$

$\Rightarrow$ é una sequenza libera di 3 vettori in $\mathbb{R}^3$ e $\dim\mathbb{R}^3=3$

$\Rightarrow$ BASE.

DIM: Sia $\mathcal{G}$ una seq. di n generatori in $V_n(\mathbb{K})$.

se $\mathcal{G}$ fosse legata $\Rightarrow$ con gli scarti successivi troviamo $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ con $|\mathcal{G}'| \leq |\mathcal{G}| - 1 < n$

ma in $V_n(\mathbb{K})$ c'é una seq. libera di n vettori $\Rightarrow$ $\lightning$

Sia $\mathcal{G}$ una sequenza libera di n vettori e supponiamo

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}) \neq V_n(\mathbb{K})$$

$$\Rightarrow \exists \bar{x} \in V_n(\mathbb{K}) \setminus \mathcal{L}(\mathcal{G})$$

ma $\bar{x}$ non é c. lineare dei vettori di $\mathcal{G}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{G} \cup \{\bar{x}\}$ é una seq. libera di $n+1$ vettori visto che nessun vettore di $\mathcal{G} \cup \{\bar{x}\}$ é c. lineare dei rimanenti.

$\Downarrow$ perché in $V_n(\mathbb{K})$ $\exists$ una seq. di n generatori $\square$

BASE IN $V_n(\mathbb{K})$ $\Longleftrightarrow$ seq. di Gen. di n elementi $\Leftrightarrow$ seq. libera di n elementi.

COME COSTRUIRE DELLE BASI

$\dim(\underline{0})=0$

$\mathcal{G}$ sequenza di generatori $\xrightarrow{\text{scarti succ.}}$ Seq. libera di generatori $\Rightarrow$ BASE

Sequenza libera $\xrightarrow{\text{complet. della base}}$ Seq. libera di generatori = BASE.

Teorema di completamento della BASE.

Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno s.vett. di dim $= n$ nel campo $\mathbb{K}$ e sia $\mathcal{B}=(\bar{b}_1 - \bar{b}_n)$

una sua base fissata.

$\Rightarrow$ Data una sequenza libera $A = (\bar{a}_1 \text{ — } \bar{a}_m)$ è sempre possibile trovare $n-m$ vettori $\bar{b}_{i_1} \dots \bar{b}_{i_{n-m}} \in \mathcal{B}$ tali che

$$A' = (\bar{a}_1 \text{ — } \bar{a}_m \; \bar{b}_{i_1} \text{ — } \bar{b}_{i_{n-m}})$$

è base di $V_n(\mathbb{K})$.

Es. in $\mathbb{R}^{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \; a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$.

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$A = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$A' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

A libera infatti

$$\alpha\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha+\beta&0\\0&-\alpha+\beta\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=0\\-\alpha+\beta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\end{cases}$$

<u>DIM</u> $\nearrow$ vedi lemma di Steinitz.

Si sostituiscono in $\mathcal{B}$ ad uno ad uno i vettori di A.

$$\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$A=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}^1 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \right)$$

$$A = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \\ -2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}^2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

BASE CHE CONTIENE A

$\Rightarrow$ vettori da aggiungere ad A per ottenere una base

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

BASI E APPLICAZIONI LINEARI

Siano $V_n(\mathbb{K})$ e $W_m(\mathbb{K})$

due spazi vettoriali.

e supponiamo

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 — \bar{e}_n)$ base di $V_n(\mathbb{K})$

$\mathcal{B}' = (\bar{e}'_1 — \bar{e}'_m)$ base di $W_m(\mathbb{K})$.

<u>OSS.</u> i valori di una applicazione lineare $f: V \to W$

dipendono solamente dai

valori di f sui vettori

di una base.

$\forall \bar{v} \in V_n(\mathbb{K})$ $\quad \bar{v} = \alpha_1 \bar{e}_1 + — + \alpha_n \bar{e}_n$

$$\Rightarrow f(\bar{v}) = f(\alpha_1 \bar{e}_1 + — + \alpha_n \bar{e}_n) =$$

$$= \alpha_1 f(\bar{e}_1) + \alpha_2 f(\bar{e}_2) + — + \alpha_n f(\bar{e}_n)$$

f é definita dai valori

di $f(\bar{e}_1) = \bar{w}_1 = \sum_{i=1}^{m} a_{i1} \bar{e}'_i$

$f(\bar{e}_2) = \bar{w}_2 = \sum_{i=1}^{m} a_{i2} \bar{e}'_i$

$\vdots$

$f(\bar{e}_n) = \bar{w}_n = \sum_{i=1}^{m} a_{in} \bar{e}'_i$

$\in W$

↓

comb. lineari della base di W.

$\boxed{a_{ij} \in \mathbb{K}}$

la applicazione lineare

$f : V_n(\mathbb{K}) \to W_m(\mathbb{K})$

é descritta da una matrice

$m \times n$

$\bar{e}_1$ rispetto la base $\mathcal{B}$ ha componenti $(1\ 0 \text{———} 0)$

prendiamo la matrice associata ad f

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

componenti di $f(\bar{e}_1)$ rispetto $\mathcal{B}'$

le proprietà delle matrici ci garantiscono che se $\bar{v} = \sum a_i \bar{e}_i$ e quindi

ha componenti $a_1 \dots a_n$

rispetto a $\mathcal{B}$ $\Rightarrow$

posto $$y = A \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

il vettore colonna y è il

vettore delle componenti di

$f(\bar{v})$ rispetto $\mathcal{B}'$