1

$A = \{(x^2\ 0\ 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

$B = \{(x+y\ \ y\ \ x) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

$C = \{(x, y+1, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

$D = \{(1\ x\ y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

$(0\ 0\ 0) \notin D$

$(1\ \ x\ \ y) + (1\ \ x'\ \ y') =$

$= (2\ \ x+x'\ \ y+y') \notin D$

$A = \{(x^2\ 0\ 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

$(1\ 0\ 0) \in A$ ma $(-1\ 0\ 0) =$

$= -1 \cdot (1\ 0\ 0) \notin A$

2)

B) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$(x+y \ y \ x), (x'+y', y', x') \in B$

$\alpha(x+y \ y \ x) + \beta(x'+y' \ y' \ x')$

$= (\alpha(x+y) + \beta(x'+y') \ \alpha y + \beta y' \ \alpha x' + \beta y')$

$= \cancel{\alpha y(\alpha+\beta)}$

$$\Big((\alpha y+\beta y') + (\alpha x+\beta x'), \overbrace{\alpha y+\beta y'}^{y''}, \underbrace{\alpha x'+\beta y'}_{x''}\Big) =$$

$= (y''+x'', y'', x'') \in B$

B è sottospazio.

$E = \{(x+1, x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ NON È s.vett.

3)

$$C = \{ (x, y+1, 0) \mid x, y \in \mathbb{R} \}.$$

$$\alpha(x, y+1, 0) + \beta(x'\ y'+1\ 0) =$$

$$(\alpha x + \beta x'; \alpha y + \alpha + \beta y' + \beta\ \ 0) =$$

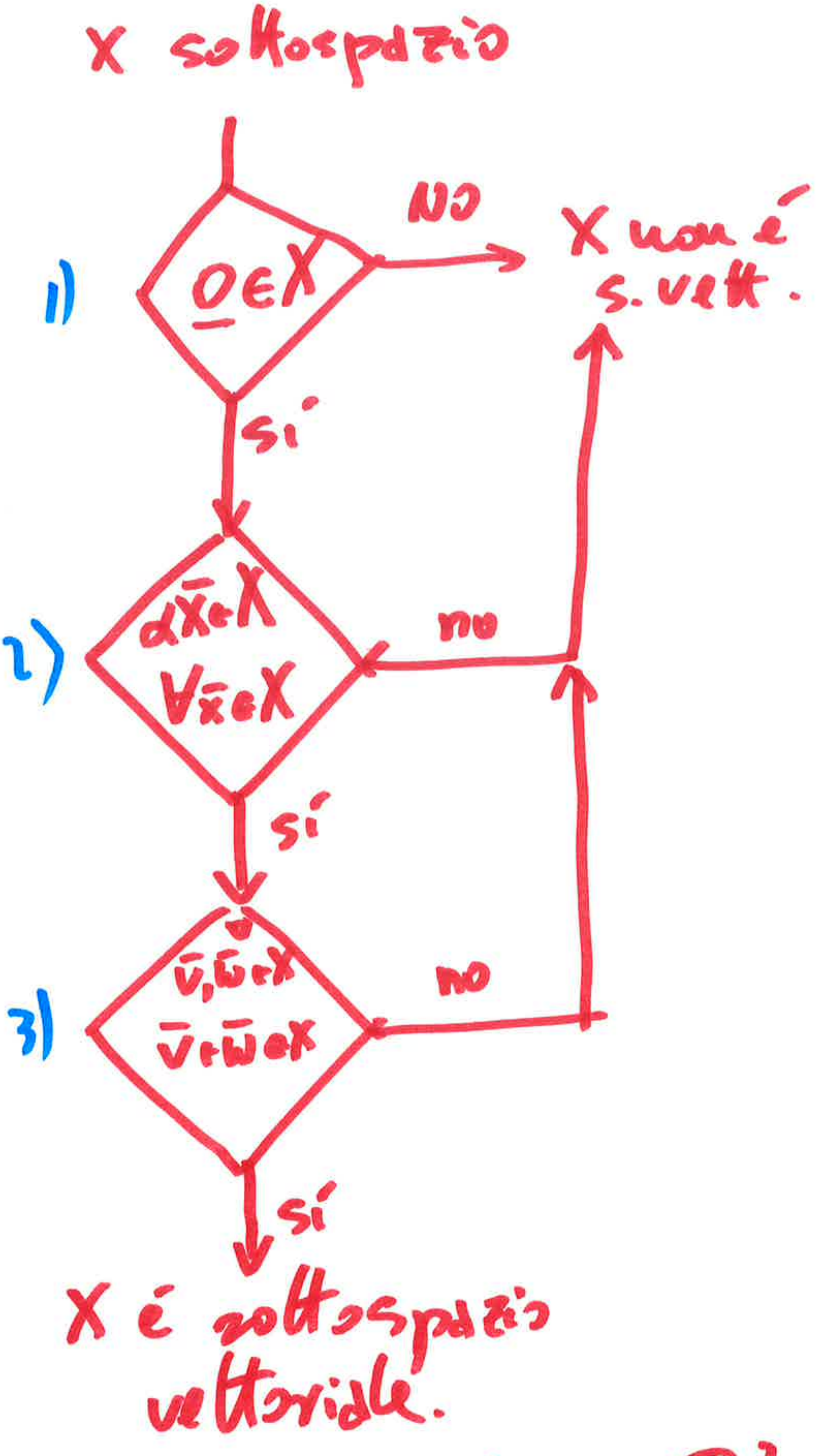
$$x'' = \alpha x + \beta \qquad y'' = \alpha y + \alpha + \beta y' + \beta - 1$$

$$= (x''\ y''+1\ 0) \in C$$

per verificare se $X \subseteq V(\mathbb{K})$

é sottospazio vettoriale.

4)



$$X = \{(x^2 - 3y^3 + 7, x^2 + y^2, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

5)

$S = \{ (1, x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R} \}.$

$$\tilde{+} : \begin{cases} S \times S \longrightarrow S \\ (1\ x, y), (1\ x'\ y') \longrightarrow (1\ \ x+x'\ \ y+y') \end{cases}$$

$(1\ 0\ 0)$

$$\tilde{\cdot} \begin{cases} \mathbb{R} \times S \longrightarrow S \\ \alpha, (1\ x\ y) \longrightarrow (1\ \alpha x\ \alpha y). \end{cases}$$

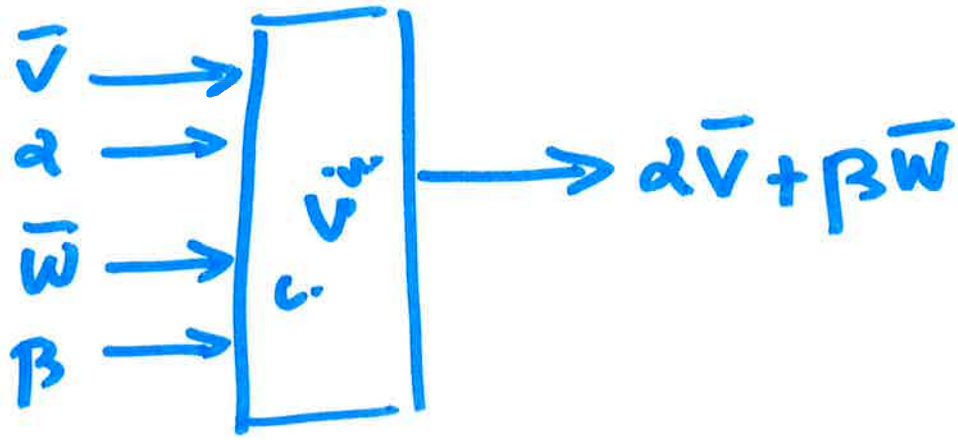
S é spazio vettoriale? <u>Si.</u>

S é sottospazio di $\mathbb{R}^3$? <u>No</u>

o

6)

Combinazione lineare



$S \subseteq V(\mathbb{K})$ sottospazio $\Leftrightarrow$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \bar{v}, \bar{w} \in S : \alpha\bar{v}+\beta\bar{w} \in S.$

1) Sequenze di generatori

2) Sequenze libere/legate.

Riusciamo a costruire tutti i vettori di uno spazio vettoriale a partire da un insieme "piccolo"?

7)

Sia $V(\mathbb{K})$ spazio vettoriale ed $X \subseteq V(\mathbb{K})$ un sistema/sequenza di vettori di $V(\mathbb{K})$.

Si dice che $V(\mathbb{K})$ é <u>generato</u> da X se $\forall \bar{v} \in V(\mathbb{K})$ si può scrivere come combinazione lineare di un numero finito di elementi di X

$$(\alpha\bar{v}+\beta\bar{w})+\gamma\bar{u} =$$
$$= \alpha\bar{v}+(\beta\bar{w}+\gamma\bar{u}) =$$
$$= \alpha\bar{v}+\beta\bar{w}+\gamma\bar{u}$$

Una c. lineare di $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n \dots$ é un vettore $\bar{u} = \sum_i \alpha_i \bar{v}_i$

8) ove solamente un numero finito di α_i é diverso da 0.

<u>Def</u> $V(\mathbb{K})$ é detto <u>finitamente generato</u> se $\exists X \subseteq V(\mathbb{K})$ con $|X| < \infty$ (insieme finito) e X insieme/seq./sistema di generatori per $V(\mathbb{K})$.

Es. $\mathbb{R}^3 = \{(x\ y\ z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

$X = ((1\,0\,0), (0\,2\,3), (0\,1\,1), (1\,4\,5))$.

$X' = ((1\,0\,0)\ (0\,1\,0)\ (0\,0\,1))$

$(x\ y\ z) = x(1\,0\,0) + y(0\,1\,0) + z(0\,0\,1)$

9) Copertura lineare.

$V(\mathbb{K})$ spazio vettoriale

$X \subseteq V(\mathbb{K})$.

$$\mathcal{L}(X) := \Big\{ \sum_i \alpha_i x_i \,\Big|\, \alpha_i \in \mathbb{K},\ x_i \in X \text{ al più un numero finito di } \alpha_i \text{ è } \neq 0 \Big\}.$$

copertura lineare di X

X insieme di gen. per $V(\mathbb{K})$ se e solamente se $\mathcal{L}(X) = V$.

che cosa è $\mathcal{L}(X)$?

è sempre un sottospazio vettoriale di X. In effetti è il più piccolo sott. vettoriale che contiene X.

$$\mathcal{L}(\emptyset) := \{\underline{0}\}.$$

10)

A) $\mathcal{L}(X)$ é sottospazio vettoriale di $V(\mathbb{K})$.

$X = \{\bar{x}_1 \text{---} \bar{x}_n \dots\}$.
$\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$.

prendo 2 elementi

$$\bar{v} = \sum_i \alpha_i \bar{x}_i \qquad \bar{w} = \sum_j \beta_j \bar{x}_j$$

$$\gamma \bar{v} + \delta \bar{w} \in \mathcal{L}(x)$$

$$\gamma \bar{v} + \delta \bar{w} = \delta \sum_i \alpha_i \bar{x}_i + \gamma \sum_i \beta_i \bar{x}_i =$$

$$= \sum_i (\delta \alpha_i + \gamma \beta_i) \bar{x}_i$$

e osservo che al più un numero finito dei termini $(\delta \alpha_i + \gamma \beta_i)$ é diverso da 0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \gamma \bar{v} + \delta \bar{w} \in \mathcal{L}(X)$.

$\square$

11) $\mathbb{R}^3$ prendiamo

$$X = ((1\,0\,1),(0\,1\,0))$$

$$\mathcal{L}(X) = \{(\alpha\,\beta\,\alpha) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}.$$

$$\alpha(1\,0\,1) + \beta(0\,1\,0)$$

$\mathcal{L}(X)$ è il più piccolo sott. che contiene X.

1) $X \subseteq \mathcal{L}(X)$ infatti prendiamo $\forall \bar{x}_i \in X$ la c. lineare

$$\bar{x}_i = 0\bar{x}_1 + \dots 0\bar{x}_{i-1} + 1\bar{x}_i + 0\bar{x}_{i+1} + \dots \in \mathcal{L}(X).$$

2) $\mathcal{L}(X)$ è il più piccolo.

sottospazio

MOSTRIAMO CHE SE $Y \leq V(\mathbb{K})$ E $X \subseteq Y \Rightarrow \mathcal{L}(X) \subseteq Y$.

17)

Sia $X \subseteq Y$ e $Y \leq V(\mathbb{K})$.

$\Rightarrow$ presi $\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n \in X$ un num. finito di elementi:

la c. lineare $\alpha_1 \bar{x}_1 + \dots + \alpha_n \bar{x}_n$

deve appartenere ad Y.

perché Y è chiuso rispetto le c. lineari.

Ma l'insieme di tutte le possibili c. lineari di elementi di X è proprio $\mathcal{L}(X) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{L}(X) \subseteq Y$ $\square$

Es. $X = ((1\ 0\ 1))$

$(1\ 0\ 1) \in Y = \{(\alpha\ \beta\ \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

$\mathcal{L}(X) = \{(\alpha\ 0\ \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \leq Y$.

13) CONSEGUENZE.

$$A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{L}(A) \subseteq \mathcal{L}(B)$$

$A = \mathcal{L}(A) \Leftrightarrow A$ é sottospazio vettoriale.

Se A non é sott. vettoriale $\Rightarrow A \subseteq \mathcal{L}(A)$ ed $A \neq \mathcal{L}(A)$ perché $\mathcal{L}(A)$ é sottospazio.

Se A é sott. vettoriale $\Rightarrow$ il più piccolo sott. che lo contiene é lui stesso $\Rightarrow A = \mathcal{L}(A)$.

$\rightarrow$ $\mathcal{L}(\mathcal{L}(A)) = \mathcal{L}(A)$ ┘

DATO un sottospazio trovare un suo insieme di generatori (piccolo / finito).

14)

$\mathbb{K}[x]$ s. vettoriale dei polinomi in x sul campo $\mathbb{K}$.

$\mathcal{G} = \{x^i \mid i \in \mathbb{N} \text{ incluso } 0\}$. =

$(1, x, x^2 x^3 \dots x^n \dots)$.

$\mathbb{R}^{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a\, b\, c\, d \in \mathbb{R} \right\}$.

$$\mathcal{G} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathcal{G}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathcal{G}'' = \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

<u>Def</u> <u>Sequenza libera</u>

15)

Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e $S = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ una sequenza di suoi vettori.

S é detta <u>libera</u> se l'unica combinazione lineare degli elementi di S che dá $\underline{0}$ é quella a coeff. tutti nulli.

S é detta <u>legata</u> se $\exists$ almeno una combinazione lineare dei suoi elementi a coeff. non tutti nulli che dá $\underline{0}$.

LEGATA = NON LIBERA

$S = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$.

S libera vuol dire

$$\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n = \underline{0} \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

16 in $\mathbb{R}^3$

$((1\,0\,0),(1\,1\,1))$

libera o legata?

$\alpha(1\,0\,0)+\beta(1\,1\,1)=(\alpha+\beta\ \ \beta\ \ \beta)$

$=(0\ 0\ 0).$

Deve essere $\beta=0$ $\alpha+\beta=0$

$\Rightarrow \alpha=0$

la seq. è libera!

$((1\,0\,0)\ (1\,1\,0)\ (0\,1\,0))$

$\alpha(1\,0\,0)+\beta(1\,1\,0)+\gamma(0\,1\,0)=$

$(0\,0\,0)$

$(\alpha+\beta\ \ \beta+\gamma\ \ 0)=(0\ 0\ 0)$ <u>LEGATA</u>

$\alpha=-\beta$ $\alpha=1$ $\gamma=1$

$\gamma=-\beta$ $\beta=-1$

Quando una sequenza è legata.

1) $\underline{0} \in S \Rightarrow S$ è legata.

perché $1 \cdot \underline{0} = \underline{0}$

è una c. lineare a coeff. non tutti nulli che dà $\underline{0}$

$\Rightarrow$ legata.

2) $v_1 \in S$ e $\exists \alpha : \bar{v}_2 = \alpha \bar{v}_1 \in S$ $\alpha \neq 0$

se in S ci sono 2 vettori proporzionali $\Rightarrow S$ è legata.

$$\boxed{-\alpha \cdot \bar{v}_1 + \bar{v}_2} = -\alpha \cdot \bar{v}_1 + \alpha \bar{v}_1 = \boxed{\underline{0}}$$

$$((1\ 2\ 0)\ (2\ 4\ 0)\ (0\ \sqrt{3}\ -\pi))$$

Teorema: Una sequenza $S = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ è legata se e solamente se almeno uno dei vettori di S si può scrivere come combinazione lineare dei rimanenti.

Es: $((1\,2\,0), (0\,1\,1), (1\,3\,1))$ legata.

$$1 \cdot (1\,3\,1) + (-1)(1\,2\,0) + (-1)(0\,1\,1) = \underline{0}$$

DIM: Ip. S legata $\Rightarrow$ Ts. un vett. è c. lineare dei rimanenti:

$\exists (a_1 \dots a_n) \neq (0 \text{—} 0)$:

$$\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \text{—} + \alpha_n \bar{v}_n = \underline{0}$$

Supponiamo sia $\alpha_1 \neq 0$

$\Rightarrow \exists\, \alpha_1^{-1} \in \mathbb{K}$ e posso scrivere

$$\alpha_1 \bar{v}_1 = -(\alpha_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n)$$

e poi $\bar{v}_1 = -\alpha_1^{-1}(\alpha_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n)$

$\Rightarrow \bar{v}_1 \in \mathcal{L}(\bar{v}_2 \dots \bar{v}_n)$

Viceversa: supponiamo

$$\bar{v}_1 = \sum_{i \geq 2} \alpha_i \bar{v}_i$$

$$\Rightarrow 1 \cdot \bar{v}_1 - \sum_{i \geq 2} \alpha_i \bar{v}_i = \underline{0}$$

ed è una c. lineare a coeff. non tutti nulli $\Rightarrow$

$\Rightarrow S$ legata $\square$