

forme bilineari $\rightarrow$ sono rappresentabili mediante una matrice

$$\beta: V_n(k) \times V_n(k) \rightarrow k \quad B = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n) \text{ base}$$

$$\bar{v} = \sum v_i \bar{e}_i, \bar{w} = \sum w_i \bar{e}_i \rightarrow \beta(\bar{v}, \bar{w}) = \sum_{i,j} v_i w_j \beta(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$$

La forma β è univocamente determinata, fissata una base B , dai valori $\beta(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$.

Se poniamo $M = (\beta(\bar{e}_i, \bar{e}_j))_{i,j=1}^n$

$$\Rightarrow \beta(\bar{v}, \bar{w}) = (v_1 \dots v_n) M \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Se } X = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \Rightarrow \beta(\bar{v}, \bar{w}) = {}^t X M Y$$

come cambia la matrice M al variare della base B .

Sia $B = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$
 $B' = (\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_n)$ due basi di $V_n(k)$

$$\text{poniamo } E = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{pmatrix} \quad E' = \begin{pmatrix} \bar{e}'_1 \\ \vdots \\ \bar{e}'_n \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

$$\bar{v} = {}^t E X = \sum x_i \bar{e}_i = {}^t E' X'$$

$$\bar{w} = {}^t E Y = {}^t E' Y' \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{coordinate} \\ \text{rispetto a } B \end{matrix}$$

$$E' = TE \quad \text{con } T \in GL(n, \mathbb{K})$$

↑ matrice di cambiamento di base

$$\beta(\bar{v}, \bar{w}) = {}^t X M Y = {}^t X' M' Y'$$

↓ matrice
rispetto
a B

↑ matrice rispetto
a B'

$$\begin{cases} X = {}^t T X' \\ Y = {}^t T Y' \end{cases} \leftarrow \text{cambiamento di coordinate}$$

$${}^t E X = {}^t E X' = {}^t (T E) X' = {}^t E T X'$$

$$\begin{aligned} {}^t X M Y &= ({}^t T X') M ({}^t T Y') = \\ &= X' \boxed{{}^t T M {}^t T} Y' = X' \boxed{M'} Y' \end{aligned}$$

↑ uguale

$$\boxed{M' = T M {}^t T}$$

cambiamento di base
per una forma
bilineare.

con T matrice di cambiamento
di Base

↑ è una cosa diversa
dal prodotto per scalare
 $\cdot: \mathbb{K} \times V \rightarrow V$

Def: Un prodotto scalare su $V_n(\mathbb{K})$ è una forma
bilineare simmetrica $\beta: V_n(\mathbb{K}) \times V_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$

cioè una forma bilineare tale che

$$\forall \bar{v}, \bar{w} \in V_n(\mathbb{K}) \quad \beta(\bar{v}, \bar{w}) = \beta(\bar{w}, \bar{v})$$

In generale se β è un prodotto scalare

scrivere uno $\beta(\bar{v}, \bar{w}) = \bar{v} \cdot \bar{w}$

oss: la matrice che rappresenta un prodotto scalare è una matrice simmetrica cioè tale che $M = M^T$

Dim: Se $\beta(\bar{v}, \bar{w}) = \beta(\bar{w}, \bar{v}) \quad \forall \bar{v}, \bar{w} \in V_n(K)$

allora anche $\beta(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \beta(\bar{e}_j, \bar{e}_i)$

$\Rightarrow M$ è simmetrica.

Viceversa se M è simmetrica

$$\begin{aligned} \beta(\bar{v}, \bar{w}) &= \sum_{i,j} v_i w_j \beta(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \\ &= \sum_{i,j} w_j v_i \beta(\bar{e}_j, \bar{e}_i) = \beta(\bar{w}, \bar{v}). \end{aligned}$$

$\uparrow M \text{ simmetrica}$

la forma bilineare è simmetrica.

Fissiamo adesso $K = \mathbb{R}$.

Def: Un prodotto scalare $\cdot : V_n(\mathbb{R}) \times V_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ è detto definito positivo se

$$\forall \bar{v} \in V_n(\mathbb{R}) \quad \boxed{\bar{v} \cdot \bar{v} \geq 0} \quad \text{e} \quad \boxed{\bar{v} \cdot \bar{v} = 0 \Leftrightarrow \bar{v} = \underline{0}}$$

positivo definito.

poniamo $\|\bar{v}\| := \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}}$

$\nearrow$
norma di $\bar{v}$

N.B. : Sia $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \|\alpha \bar{v}\| = \sqrt{(\alpha \bar{v}) \cdot (\alpha \bar{v})} =$

N.B.B.

$\sqrt{x^2} = |x|$

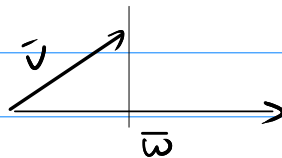
$= \sqrt{\alpha^2 \bar{v} \cdot \bar{v}} = |\alpha| \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}} = |\alpha| \cdot \|\bar{v}\|$

Oss : La matrice M che descrive un prodotto scalare definito positivo ha $\det \neq 0$

infatti se $\exists \bar{v} = (v_1, \dots, v_n) \neq \underline{0}$ tale che

$M \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \underline{0} \Rightarrow (v_1, \dots, v_n) M \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (v_1, \dots, v_n) \underline{0} = 0$

con $\bar{v} \neq \underline{0}$.



Def : Due vettori $\bar{v}, \bar{w}$ sono detti ortogonali rispetto

un prodotto scalare $\cdot : V_n(\mathbb{R}) \times V_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

se $\bar{v} \cdot \bar{w} = 0$. In questo caso scriviamo

$\bar{v} \perp \bar{w}$

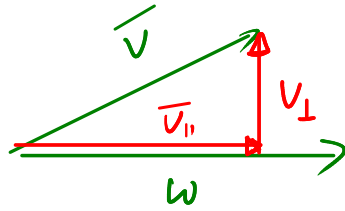
$\nwarrow$ perp (ortogonale)

Teorema : Siano $\bar{v}, \bar{w}$ due vettori e supponiamo

$\bar{w} \cdot \bar{w} \neq 0$. Allora esistono 2 vettori:

$\bar{v}_{||}$ e $\bar{v}_{\perp}$, tali che

$\bar{v} = \bar{v}_{||} + \bar{v}_{\perp}$, $\bar{v}_{\perp} \cdot \bar{w} = 0$, $\bar{v}_{||} = \alpha \bar{w}$ per un $\alpha \in \mathbb{R}$



Dim : Scriviamo

$$\begin{cases} \bar{v}_\perp := \bar{v} - (\bar{v} \cdot \bar{w}) \frac{\bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \\ \bar{v}_\parallel = (\bar{v} \cdot \bar{w}) \cdot \frac{\bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \end{cases}$$

$\bar{v}_\parallel$ è proporzionale a $\bar{w}$ con coeff $\alpha_{\bar{v}} = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}}$

mostriamo che $\bar{v}_\perp \perp \bar{w}$ calcolando

$$\begin{aligned} (\bar{v}_\perp \cdot \bar{w}) &= (\bar{v} - \bar{v}_\parallel) \cdot \bar{w} = \bar{v} \cdot \bar{w} - \frac{(\bar{v} \cdot \bar{w})(\bar{w} \cdot \bar{w})}{(\bar{w} \cdot \bar{w})} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\alpha_{\bar{v}} = \frac{(\bar{v} \cdot \bar{w})}{(\bar{w} \cdot \bar{w})}$ è detto coeff. di Fourier di $\bar{v}$ rispetto $\bar{w}$

$\bar{v}_\parallel$ è detto proiezione ortogonale di $\bar{v}$ su $\bar{w}$.

(ed è $\bar{v}_\parallel = \alpha_{\bar{v}} \bar{w}$).

Def Uno spazio vettoriale $V_n(\mathbb{R})$ dotato di prodotto scalare definito positivo è detto spazio vettoriale euclideo $V_n^o(\mathbb{R})$.

Def. Una base B di $V_n^o(\mathbb{R})$ è detta ortonormale se $B = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ e si ha

$$\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

oss: Sia $V_n(\mathbb{R})$ uno sp. vettoriale Euclideo. e

$B = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una sua base ortonormale

$\Rightarrow$ il prodotto scalare $\cdot$ è rappresentato rispetto a B dalla matrice identica I .

Teorema: $V_n(\mathbb{R})$ ammette sempre una base ortonormale.

STEP 0: In $\mathbb{R}^n$ si dice prodotto scalare standard il prodotto scalare

$$(x_1 \dots x_n) \cdot (y_1 \dots y_n) = \sum_i x_i y_i$$

Ad esempio in $\mathbb{R}^3$ il prod. scalare

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = (xx' + yy' + zz')$$

$$\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

prod. scalare rappresentato dalla matrice identica.

Esercizio: Sia $B = ((1, 2), (0, 1))$ una base di $\mathbb{R}^2$

trovare un prodotto scalare

$$*: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ tale che}$$

B sia ortonormale per $*$.

STARE CERCANDO $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{pmatrix}$ tale che

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} (1 \ 2) M \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \\ (0 \ 1) M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \\ (1 \ 2) M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1 \ 2) \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \\ = (1 \ 2) \begin{pmatrix} m_{11} + 2m_{12} \\ m_{21} + 2m_{22} \end{pmatrix} = 1 \end{array}$$

STEP 1) Sia $S = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$ una sequenza ortonormale di vettori $\Rightarrow S$ è una sequenza libera

DIM Supponiamo $\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_k \bar{v}_k = \underline{0}$ (*)

mostriamo $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k$

poiché S è ortonormale moltiplicando scalarmente per $\bar{v}_i$ a dx e a sx di (*) otteniamo

$$\bar{v}_i \cdot (\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_k \bar{v}_k) = \bar{v}_i \cdot \underline{0} = 0$$

$$\alpha_1 \underbrace{(\bar{v}_i \cdot \bar{v}_1)}_{\substack{\parallel \\ 0}} + \alpha_2 \underbrace{(\bar{v}_i \cdot \bar{v}_2)}_{\substack{\parallel \\ 0}} + \dots + \alpha_i \underbrace{(\bar{v}_i \cdot \bar{v}_i)}_{\substack{\parallel \\ 1}} + \dots + \alpha_k \underbrace{(\bar{v}_i \cdot \bar{v}_k)}_{\substack{\parallel \\ 0}} = \alpha_i$$

$\Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i$ e la sequenza è libera.

N.B., basta che la seq. sia ortonormale e ogni vettore $\bar{v}_i$ sia tale che $\bar{v}_i \cdot \bar{v}_i \neq 0$

STEP 2 : Sia B una base ortonormale $B = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$
e sia $\bar{v} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n$

allora

$$d_i = \bar{v} \cdot \bar{e}_i$$

la componente i -esima del vettore $\bar{v}$ rispetto la base ortonormale $\mathcal{B}$ è data dal prodotto scalare di $\bar{v}$ per $\bar{e}_i$.

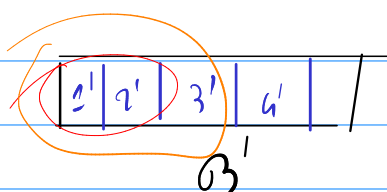
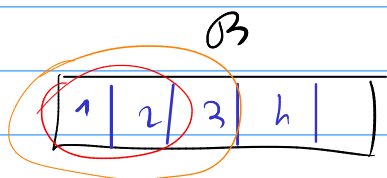
STEP 3: Sia $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \text{ --- } \bar{e}_r)$ una base di W

con $W \subseteq V_n(\mathbb{R}) \Rightarrow$ esiste in W

una base ortonormale $\mathcal{B}'$ che si può costruire a partire da $\mathcal{B}$.

In particolare se $\mathcal{B}' = (\bar{e}'_1 \text{ --- } \bar{e}'_r)$

$\Rightarrow$ abbiamo anche che $\mathcal{L}(\bar{e}_1 \text{ --- } \bar{e}_r) = \mathcal{L}(\bar{e}'_1 \text{ --- } \bar{e}'_r)$



Algoritmo di Gram-Schmidt

(di ortonormalizzazione).

INPUT: $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \text{ --- } \bar{e}_r)$.

OUTPUT: $\mathcal{B}'$

$$\bar{e}'_1 := \frac{1}{\sqrt{\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1}} \bar{e}_1$$

N.B. $\mathcal{B}$ base $\Rightarrow \|\bar{e}_1\| \neq 0$
perché $\bar{e}_1 \neq \underline{0}$

$$\|\bar{e}'_1\| = 1$$

$$\tilde{e}_2 := \bar{e}_2 - (\bar{e}_2 \cdot \bar{e}'_1) \bar{e}'_1$$

$$\bar{e}'_2 := \frac{1}{\sqrt{\tilde{e}_2 \cdot \tilde{e}_2}} \tilde{e}_2$$

$$\|\bar{e}'_2\| = 1$$

$$\bar{e}_1 \cdot \bar{e}'_2 = 0$$

$$\tilde{e}_3 = \bar{e}_3 - (\bar{e}_3 \cdot \bar{e}_1') \bar{e}_1' - (\bar{e}_3 \cdot \bar{e}_2') \bar{e}_2'$$

$$\bar{e}_3' = \frac{1}{\sqrt{\tilde{e}_3 \cdot \tilde{e}_3}} \tilde{e}_3$$

⋮

$$\tilde{e}_k = \bar{e}_k - \sum_{j < k} (\bar{e}_k \cdot \bar{e}_j') \bar{e}_j'$$

$$\bar{e}_k' = \frac{1}{\sqrt{\tilde{e}_k \cdot \tilde{e}_k}} \tilde{e}_k$$

In $\mathbb{R}^3$ rispetto prod. scalare std.

consideriamo $\left(\underset{\bar{e}_1}{(3,0,0)}, \underset{\bar{e}_2}{(1,2,0)}, \underset{\bar{e}_3}{(0,1,1)} \right)$

$$\bar{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{9}} (3,0,0) \rightarrow (1,0,0)$$

$$\begin{aligned} \tilde{e}_2' &= (1,2,0) - [(1,2,0) \cdot (1,0,0)] \cdot (1,0,0) = \\ &= (0,2,0) \end{aligned}$$

$$\bar{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{4}} (0,2,0) = (0,1,0)$$

$$\begin{aligned} \tilde{e}_3 &= (0,1,1) - (0,1,1) \cdot \overbrace{(1,0,0)}^{\rightarrow 0} (1,0,0) \\ &\quad - (0,1,1) \cdot (0,1,0) (0,1,0) = \\ &= (0,0,1) \end{aligned}$$

$$\bar{e}_3' = \frac{1}{\sqrt{1}} (0,0,1) = (0,0,1)$$

$$B = ((0 \ 1 \ 1), (3 \ 0 \ 0), (1 \ 2 \ 0))$$

$$\bar{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} (0 \ 1 \ 1) = \left(0 \ \frac{2}{\sqrt{2}} \ \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\begin{aligned} \tilde{e}_2 &= (3 \ 0 \ 0) - (3 \ 0 \ 0) \cdot \left(0 \ \frac{2}{\sqrt{2}} \ \frac{2}{\sqrt{2}}\right) \left(0 \ \frac{2}{\sqrt{2}} \ \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \\ &= (3 \ 0 \ 0) \end{aligned}$$

$$\bar{e}_2' = (1 \ 0 \ 0)$$

$$\begin{aligned} \tilde{e}_3 &= (1 \ 2 \ 0) - (1 \ 2 \ 0) \cdot \left(0 \ \frac{2}{\sqrt{2}} \ \frac{2}{\sqrt{2}}\right) \left(0 \ \frac{2}{\sqrt{2}} \ \frac{2}{\sqrt{2}}\right) \\ &\quad - (1 \ 2 \ 0) \cdot (1 \ 0 \ 0) (1 \ 0 \ 0) = \\ &= (1 \ 2 \ 0) - \frac{4}{\sqrt{2}} \left(0 \ \frac{2}{\sqrt{2}} \ \frac{2}{\sqrt{2}}\right) - (1 \ 0 \ 0) = \\ &= (1 \ 2 \ 0) - (0 \ 4 \ 4) - (1 \ 0 \ 0) = \\ &= (0 \ -2 \ -4) \end{aligned}$$

$$\bar{e}_3' = \frac{1}{\sqrt{20}} (0, -2, -4)$$

Sia M una matrice che rappresenta un prodotto
scalare definito positivo $\Rightarrow \exists T \in GL(n, \mathbb{R})$
tale che $TM^t T = \underline{I}$

proprietà del prodotto scalare eucledio in $V_n(\mathbb{R})$
↓
def. positivo.

$$1) \quad \|\bar{v}\| \geq 0 \quad \& \quad \|\bar{v}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{v} = \underline{0}$$

$$2) \quad \|\bar{v}\| \cdot \|\bar{w}\| \geq |\bar{v} \cdot \bar{w}| \quad (\text{Cauchy-Schwarz})$$

$$3) \quad \|\bar{v} + \bar{w}\| \leq \|\bar{v}\| + \|\bar{w}\| \quad (\text{triangolo})$$

$$\frac{|\bar{v} \cdot \bar{w}|}{\|\bar{v}\| \cdot \|\bar{w}\|} \quad \parallel$$