II test: Mercoledì 22/12 ore 11 aula N5

Lezione (recupero 2 ore) Martedì 21/12
ore 14 aula N2

Coniche in $PG(2, \mathbb{K})$ $\quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$

Coniche
- singolari (con almeno un pto doppio) → riducibili
- generali (prive di pti doppi).

Coniche singolari → i punti doppi corrispondono alle classi di Ker A

Conica singolare ⟺ $\det A = 0$

$rk(A) = 2$ → 2 rette distinte
- reali
- imm. coniugate

$rk(A) = 1$ → 1 retta contata 2 volte

Conica Generale → classificazione affine loro punti impropri.

studiamo $\mathcal{C} \cap l_\infty$.

Def $\mathcal{C}$ Ellisse se $\mathcal{C} \cap l_\infty = \{P, \bar{P}\}$ due punti immaginari e coniugati

Se $\mathcal{C} \cap l_\infty = \{J_\infty, \bar{J}_\infty\} \Rightarrow \mathcal{C}$ è una circonferenza

$\mathcal{C}$ parabola se $\mathcal{C} \cap l_\infty = \{P\}$ con punto reale contato 2 volte

$\mathcal{C}$ è tangente l_∞.

$\mathcal{C}$ è una iperbole se $\mathcal{C} \cap l_\infty = \{P, Q\}$ sono 2 punti reali e distinti

Come riconoscere le coniche analiticamente.

$$(*) \begin{cases} {}^tXAX = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

si studia il sistema (di II grado)

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

per vedere quando ha soluzioni (e quante) consideriamo $\frac{\Delta}{4}$ della eq. di II grado

$$\frac{\Delta}{4} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

poniamo $A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

CONDIZIONI ANALITICHE

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Ellisse} \iff \frac{\Delta}{4} < 0 \iff \det A^* > 0 \\ \text{parabola} \iff \frac{\Delta}{4} = 0 \iff \det A^* = 0 \\ \text{iperbole} \iff \frac{\Delta}{4} > 0 \iff \det A^* < 0 \end{array}}$$

proprietà notevoli delle coniche.

Def. Sia $\mathcal{C}$ una conica generale.

Si dicono

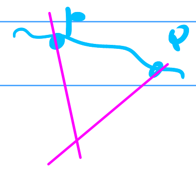
- <u>centro</u> di $\mathcal{C}$ il polo della retta impropria ℓ_∞.

$$C = \ell_\infty^{\perp_{\mathcal{C}}}$$

- si dice che $\mathcal{C}$ é <u>a centro</u> se il suo centro é un punto proprio
  ($\mathcal{C}$ a centro $\Leftrightarrow$ iperbole o ellisse).
  [nel caso della parabola $\ell_\infty^\perp \in \ell_\infty \Rightarrow$ il centro é un punto improprio]

- si dice <u>diametro</u> di $\mathcal{C}$ ogni polare di un punto improprio
  (diametri = tutte e sole le rette che passano per il centro $\rightarrow$ dal principio di reciprocità).
  a) i diametri di una ellisse o una iperbole sono un fascio proprio di rette
  b) i diametri di una parabola sono tutti paralleli fra loro e quindi formano un fascio improprio

- Si dice <u>asintoto</u> di $\mathcal{C}$ ogni retta tangente propria a $\mathcal{C}$ in un suo punto improprio
  a) Ogni iperbole ha 2 asintoti reali.



  b) Ogni ellisse ha 2 asintoti immaginari e coniugati. → in particolare gli asintoti di una circonferenza sono 2 rette per J_∞ e $\bar{J}_\infty$ e dunque sono 2 rette isotrope.

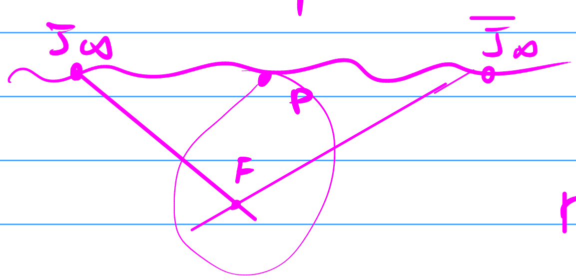
c) Una parabola non ha asintoti (perché c'é un solo punto improprio ed essa ha come tg. in quel punto la retta impropria).

d) Gli asintoti sono per definizione diametri → si intersecano nel centro della conica.

- si dice <u>fuoco</u> di $\mathcal{C}$ ogni intersezione propria delle rette tangenti alla conica condotte per i punti ciclici J_∞ e $\bar{J}_\infty$

1) In particolare, se $\mathcal{C}$ é una circonferenza ⇒ $\exists!$ retta tg a $\mathcal{C}$ per J_∞ ed una unica per $\bar{J}_\infty$ e si tratta delle loro polari ⇒ $\exists!$ fuoco che coincide con il centro di $\mathcal{C}$

2) Se $\mathcal{C}$ é una parabola ⇒ esiste un'unica tangente propria t per J_∞ e $\bar{t}$ é la tg propria alla parabola per $\bar{J}$



⇒ $t \cap \bar{t}$ é un punto reale proprio ed é l'unico fuoco di $\mathcal{C}$.

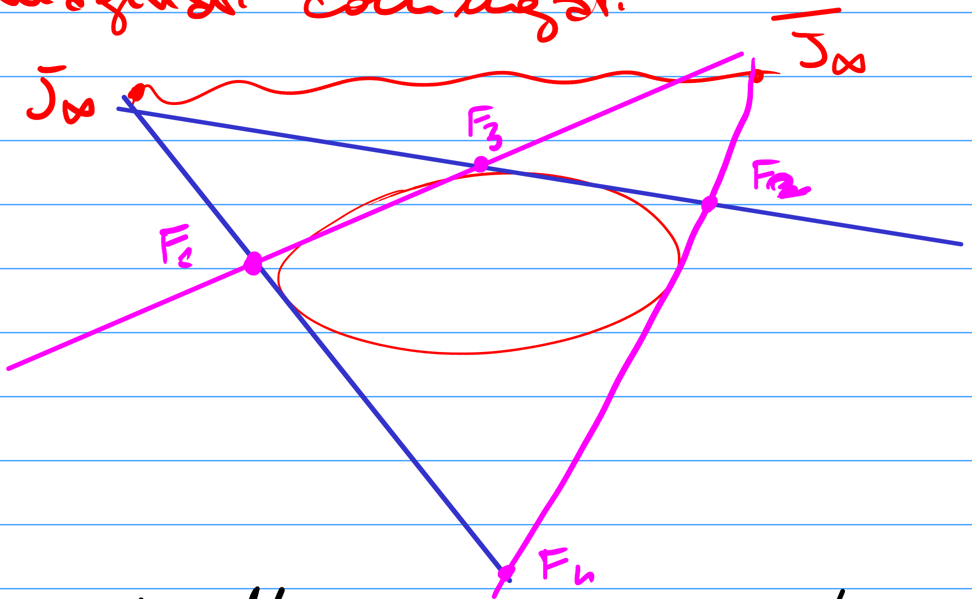
3) Se $\mathcal{C}$ è una conica a centro (ellisse o iperbole) $\neq$ circonferenza $\Rightarrow \exists$ 2 rette r_1 ed r_2 per J_∞ tangenti a $\mathcal{C}$ e $\overline{r_1}, \overline{r_2}$ sono le 2 rette per $\overline{J_\infty}$ tangenti a $\mathcal{C}$.

Ne segue che ci sono 4 intersezioni proprie possibili

$F_1 = r_1 \cap \overline{r_1}$ $\quad F_3 = r_1 \cap \overline{r_2}$

$F_2 = r_2 \cap \overline{r_2}$ $\quad F_4 = \overline{F_3} = \overline{r_1} \cap r_2$

$\rightarrow$ ci sono 4 fuochi di cui 2 reali e 2 immaginari coniugati



- Si dice <u>direttrice</u> di $\mathcal{C}$ ogni polare di un fuoco di $\mathcal{C}$.

- Si dice <u>asse</u> di $\mathcal{C}$ ogni diametro di $\mathcal{C}$ ortogonale al proprio polo.

- Si dice <u>vertice</u> di $\mathcal{C}$ ogni intersezione propria di un asse con $\mathcal{C}$.

Teorema: Sia $\mathcal{C}$ una conica generale.

- Se $\mathcal{C}$ è una parabola $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ ha esattamente un asse.
- se $\mathcal{C}$ è una circonferenza $\Rightarrow$ ogni diametro di $\mathcal{C}$ è un asse
- se $\mathcal{C}$ è una conica a centro $\neq$ circonferenza $\Rightarrow$ $\exists$ esattamente 2 assi per $\mathcal{C}$ (:conica) e questi sono ortogonali fra loro.

DIM $\mathcal{C}$: ${}^tXAX = 0$

consideriamo un punto improprio $P = [(\ell \; m \; 0)]$ e la sua polare.

$$(\ell \quad m \quad 0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$0 = (\ell a_{11} + m a_{12})x_1 + (\ell a_{12} + m a_{22})x_2 + (\ell a_{13} + m a_{23})x_3$$

$$\ell(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + m(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) = 0$$

equazione del fascio dei diametri.

Vogliamo i diametri ortogonali al proprio polo.

$$\begin{vmatrix} \ell a_{11} + m a_{12} & \ell a_{12} + m a_{22} \\ \ell & m \end{vmatrix} = 0$$

i coeff. di x_0 ed x_1 devono essere proporzionali a (ℓ, m).

$$m(\ell a_{11} + m a_{12}) - \ell(\ell a_{12} + m a_{22}) = 0$$

(*) $$m^2 a_{12} + m\ell(a_{11} - a_{22}) - \ell^2 a_{12} = 0$$

Se $a_{11} = a_{22}$ e $a_{12} = 0 \Rightarrow$ (*) è sempre soddisfatta

$\Rightarrow$ la conica è del tipo $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{11} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ (Δ)

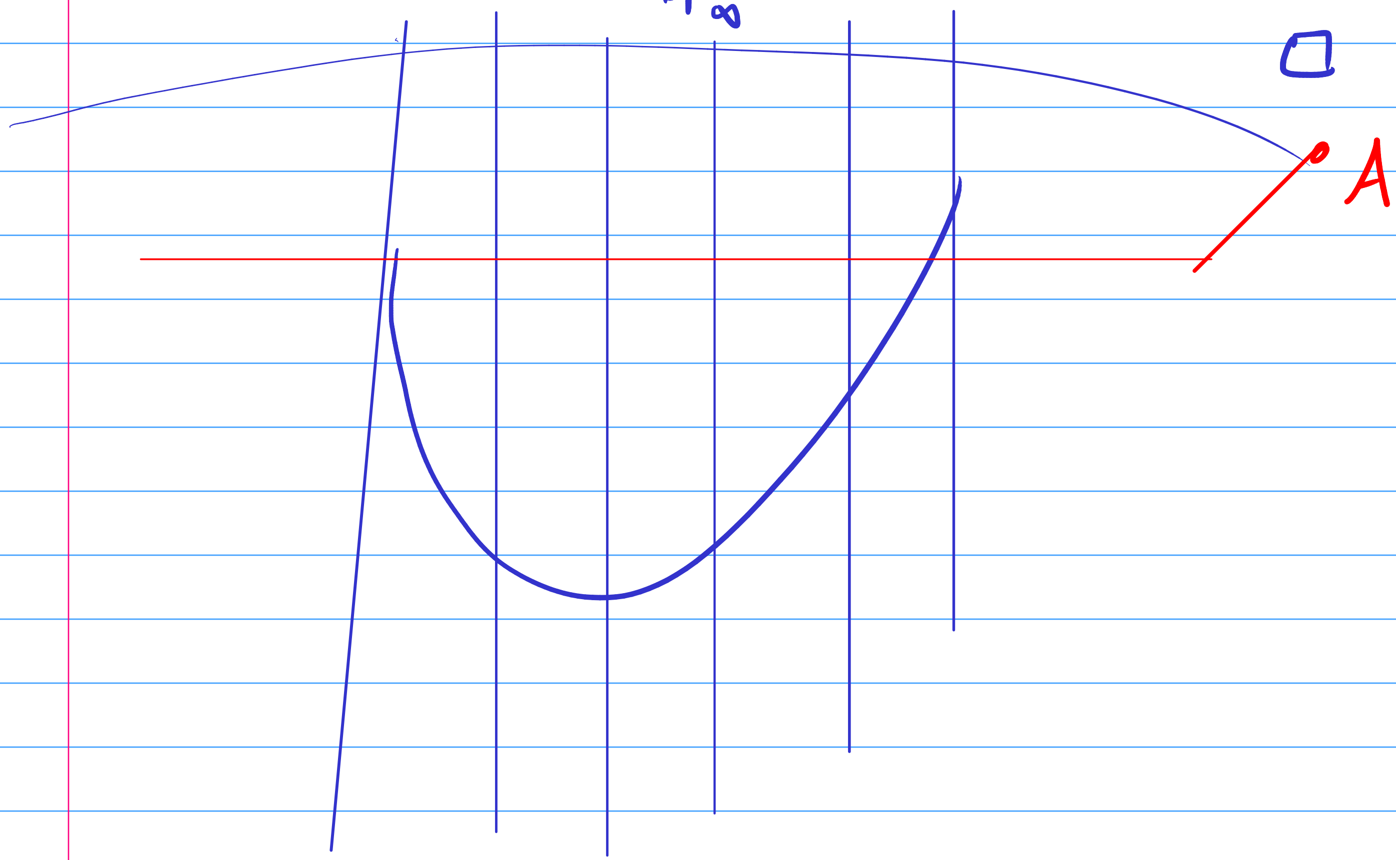
e vorremo che passa per $J_\infty = [(1, i, 0)]$ e $\bar{J}_\infty$ $\Rightarrow$ in questo caso è una circonferenza.

Viceversa se è una circ. $\Rightarrow A$ è del tipo (Δ).

- Supponiamo che $\mathcal{C}$ sia una parabola $\Rightarrow$ (*) consta di rette parallele per il punto P_∞ $\Rightarrow$ in particolare il polo degli assi di $\mathcal{C}$ deve essere ortogonale a P_∞ ma $\exists!$ punto ortogonale a P_∞ in $\mathcal{C}_\infty$ $\Rightarrow \exists!$ polo di un asse

2

e l'asse è $_{P_\infty}$ la sua polare □

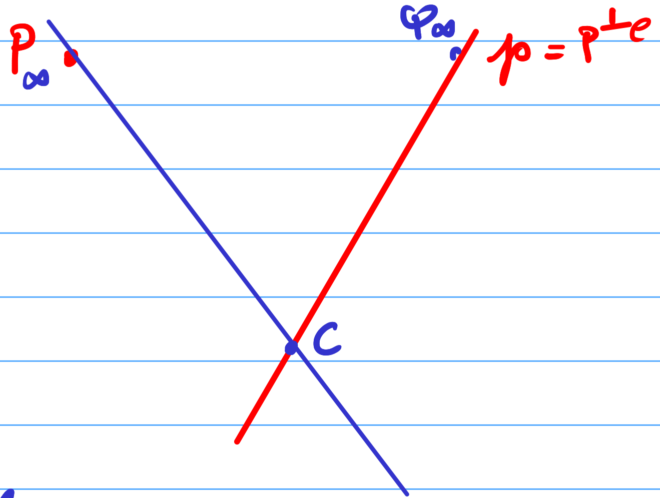


CONICA A CENTRO

$$m^2 a_{12} + ml(a_{11} - a_{22}) - l^2 a_{12} = 0$$

2 soluzioni distinte => 2 ASSI.

Mostriamo che gli assi se sono 2 sono ortogonali fra loro.



dimostriamo che il polo di un asse è il punto improprio dell'altro asse.

Sia a un asse ed A il suo polo =>

A è ortogonale ad a. Consideriamo il diametro passante per A. il polo di questo diametro deve appartenere alla polare di A

=> il polo di questo diametro deve appartenere ad a

=> esso è il punto improprio di a (perché il polo di un diametro è un punto improprio)

$\Rightarrow$ esso è ortogonale ad A (perché il punto improprio di a è tale). $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ il diametro per A è un asse ed esso è ortogonale all'asse a. $\square$

Equazioni canoniche per le coniche.

1) CIRCONFERENZA $\rightarrow$ scegliamo come origine del rif. il centro della circonferenza.

$\Rightarrow$ la matrice risulta del tipo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

(passaggio per i punti ciclici $\Rightarrow$ $a_{11} = a_{22}$ e $a_{12} = 0$;

centro $= (0,0) \Rightarrow a_{13} = a_{23} = 0$).

$$a_{11}(x_1^2 + x_2^2) + a_{33}x_3^2 = 0$$

$$\boxed{a_{11}(x^2 + y^2) = -a_{33}}$$

2) Ellissi e iperboli.

$\rightarrow$ riferimento in cui ORIGINE = centro della conica

→ BASE DEL RIFERIMENTO → vettori con le direzioni degli assi.

→ GLI ASSI SONO LE RETTE $x=0$ ed $y=0$

↓

passando a coordinate non omogenee abbiamo

ELLISSE $\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=c \quad \det\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{b^2}\end{pmatrix}>0$

IPERBOLE $\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=c \quad \det\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{b^2}\end{pmatrix}<0$

centro $=(0,0)=$ intersezione degli assi.

$$l\left(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\right)+m\left(a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\right)=0$$

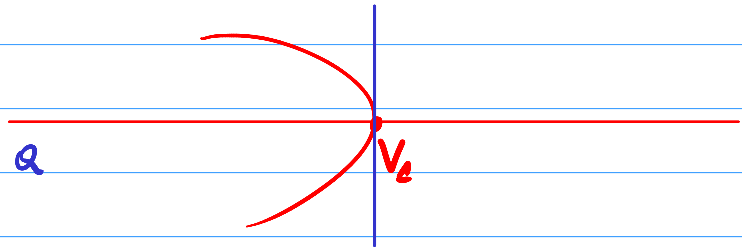
$l=0 \rightarrow \quad a_{22}\neq 0, \quad a_{12}, a_{23}=0 \qquad y=0$

$m=0 \rightarrow \quad a_{11}\neq 0, \quad a_{12}=a_{13}=0 \qquad x=0$

$$\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}a_{11} & 0\\ 0 & a_{22}\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\ \begin{matrix}0 & 0\end{matrix} & a_{33}\end{pmatrix}$$

parabola: riferimento in cui O è il vertice della parabola; la base è data dalla direzione dell'asse + la direzione della tg nel vertice.

oss: le tangenti nei vertici di una conica sono rette ortogonali all'asse passante per quel vertice.



la tangente in V_1 è la polare di V_1 e a e dunque essa passa per il polo di a, ma il polo di a è ortogonale ad a. $\square$

verifica che l'eq. canonica è del tipo

$$y = a x^2$$

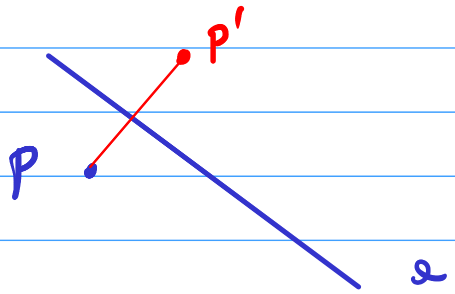
oppure $x = a y^2$

N.B | ragionare sulle forme canoniche non è mai restrittivo.

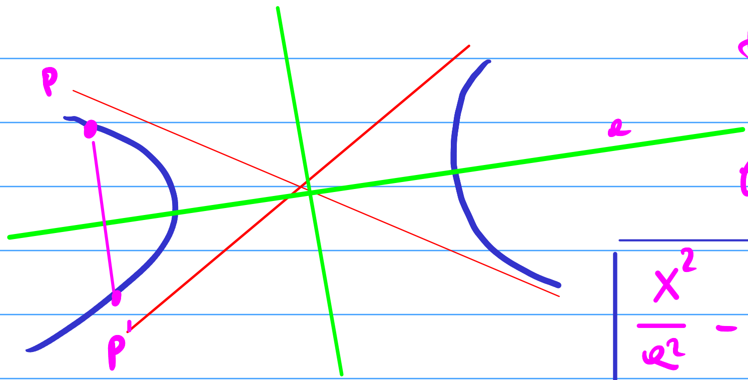
Se vogliamo ad esempio far vedere che una iperbole è simmetrica rispetto i suoi assi

$\downarrow$

si intende che fissato a l'asse di una iperbole e considerata la funzione che associa ad ogni punto P il punto P' tale che a sia l'asse del segmento PP'



$\Rightarrow$ questa funzione rispetto un asse di un'iperbole manda l'iperbole in se stessa



fissiamo un rif. in cui l'iperbole ha eq. canonica

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

osserviamo che la riflessione rispetto l'asse $a: x=0$

è la funzione $(x,y) \to (x,-y)$

ma questa manda $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

in $\frac{x^2}{a^2}-\frac{(-y)^2}{b^2}=1$ che è

ancora $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

e quindi l'iperbole è mandata in se stessa. □