

Geometria Euclidea

$E_n(\mathbb{R})$ geometria affine

+ nozione di distanza fra punti

+ prodotto scalare fra direzioni.

Riferimenti Euclidei = riferimenti affini

in cui la base è ortonormale

rispetto al prod. scalare

↓
il prodotto scalare in componenti
ha la forma

$$(x_1 \dots x_n) \cdot (y_1 \dots y_n) = \sum_i x_i y_i$$

$$P, Q \in E_n(\mathbb{R}) \quad d(P, Q) = \|\vec{PQ}\|$$

distanza fra oggetti differenti.

Se X e Y sono 2 insiemi di punti possiamo

$$d(X, Y) := \min \{ d(x, y) \mid x \in X, y \in Y \}$$

N.B. $\nearrow$ non è una "distanza" perché in generale se

$$X \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow d(X, Y) = 0$$

Distanza punto/iperspazio (punto/retta).

Abbiamo mostrato che se $P \in E_n(\mathbb{R})$ e Z è un sottospazio di $E_n(\mathbb{R}) \Rightarrow$ il punto più vicino di Z

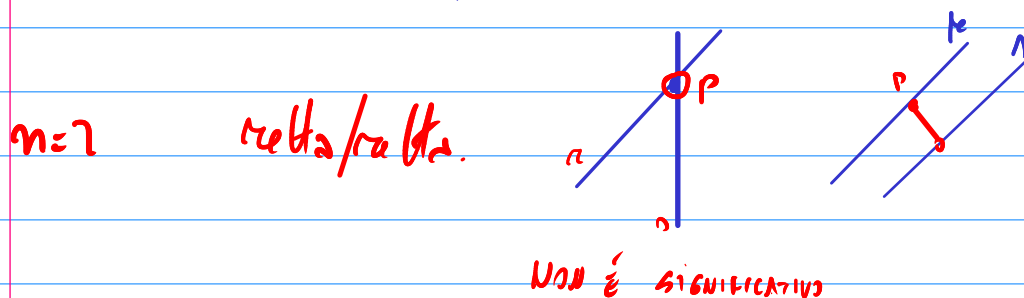
a P è la proiezione ortogonale P' di P su Σ
 e $d(P, \Sigma) = d(P, P')$.

$$\Sigma: a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b = 0$$

$$P = (p_1, \dots, p_n)$$

$$\Rightarrow d(P, \Sigma) = \frac{|a_1p_1 + \dots + a_np_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}$$

DISTANZA	Retta/Retta	($n=2, n=3$)	li studiamo solo per spazi disgiunti
	Retta/piano	($n=3$)	
	punto/Retta	($n=3$)	
	piano/piano	($n=3$)	



Siano $r \parallel s$ in $E_2(\mathbb{R})$ e sia $P \in r \Rightarrow$ la distanza

$d(P, s)$ non dipende dal punto P che
 si è scelto $\Rightarrow$ è proprio la distanza
 fra r e s .

$$r: ax + by + c = 0$$

$$P = (x_P, y_P)$$

$$s: ax + by + c' = 0$$

$$P \in s: ax_P + by_P + c' = 0$$

$$d(P, r) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

IDENTICO PER LA DISTANZA FRA 2 PIANI PARALLELI.
 PER $n=3 \rightarrow d(\pi, \sigma) = d(P, \sigma)$ ove $P \in \pi$.

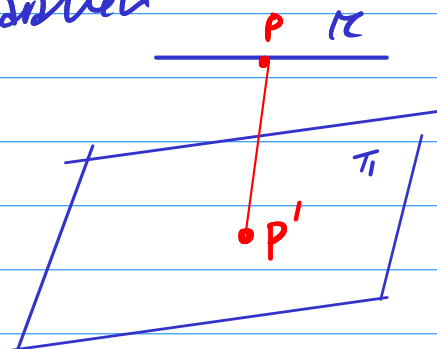
DISTANZA DI 2 rette incidenti per $n=2, 3$ o 2 piani
 INCIDENTI $\rightarrow$ non è definita.

DISTANZA π, π'
 INCIDENTI

DISTANZA $\rightarrow$ retta/piano paralleli

$\pi // \pi'$

$$\forall P, P' \in \pi: d(P, \pi) = d(P', \pi)$$



in questo possiamo prendere il piano π' per r parallelo
 a π ed ogni punto di π' è alla medesima distanza
 da π .

DISTANZA FRA 2 rette parallele in $E_3(\mathbb{R}) =$

DISTANZA punto/retta in $E_3(\mathbb{R})$.

Trovare la proiezione ortogonale del punto
 sulla retta.

$$P = (x_p, y_p, z_p)$$

$$r_0: \begin{cases} x = x_0 + t \ell \\ y = y_0 + t m \\ z = z_0 + t n \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

considerate $P' = r_0 \cap [\ell(x - x_p) + m(y - y_p) + n(z - z_p) = 0]$

e per calcolate $d(P, P') = d(P, \pi)$

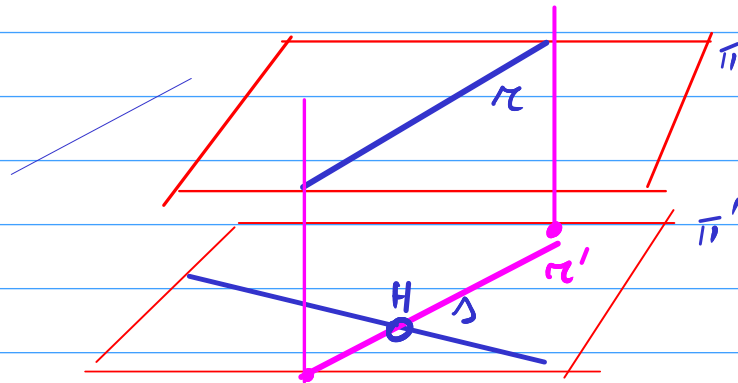
↓
piano per P
ortogonale ad
 π .

DISTANZA IN $E_3(\mathbb{R})$ fra 2 rette sghembe.

$$\pi \subseteq \pi$$

$$\gamma \subseteq \pi'$$

$$\pi // \pi'$$

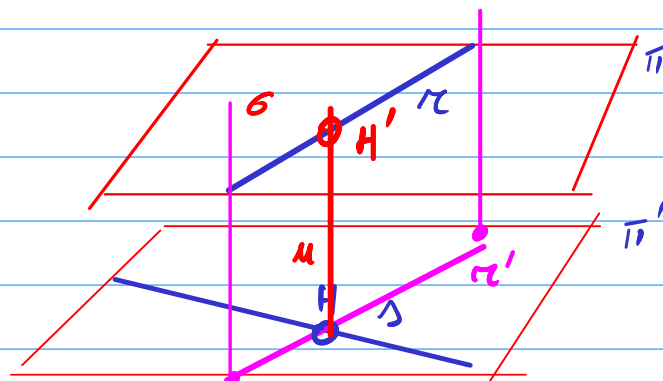


La distanza minima fra π ed γ è almeno la distanza $d(\pi, \pi')$.

$$d(\pi, \gamma) \geq d(\pi, \pi')$$

proiettiamo ortogonalmente π su π' . cioè prendiamo il piano σ per π ortogonale a π e lo intersechiamo con π' .

chiamo $\pi' = \pi' \cap \sigma$. Adesso π' ed γ sono 2 rette complanari e non parallele $\Rightarrow \pi' \cap \gamma = H'$



$$d(H, H') = d(\pi, \pi')$$

$$\parallel$$

$$d(\pi, \gamma)$$

$d(\pi, \pi') = d(H, \pi) = d(H, \pi)$. considera la retta "per H

ortogonale a π' ; $\mu \in \sigma$, $\pi \in \sigma$; $\mu \cap \pi = H'$
perche μ ed π non sono $\parallel$

e osservo $H' =$ proiezione ortogonale di H su $\pi \Rightarrow$

$$d(\kappa, H) = d(H', H)$$

$$d(\kappa, \pi) = d(\kappa, \kappa') = \frac{d(\kappa, \pi)}{\text{perché } H \in \kappa' \text{ e qualsiasi altro punto di } \kappa' \text{ è più lontano di } H \text{ da } \kappa.}$$

$$d(\pi, \kappa) = d(\kappa', \pi) = d(\pi, \pi') \quad \square$$

Def: Date 2 rette sghembe κ, π in $E_3(\mathbb{R})$, si dice

retta di minima distanza fra κ ed π

l'unica retta di $E_3(\mathbb{R})$ ortogonale sia ad κ che ad π ed incidente entrambe in punti H, H' .

In particolare $d(\kappa, \pi) = d(H, H')$ ed i punti H, H' sono i punti più vicini di κ ed π .

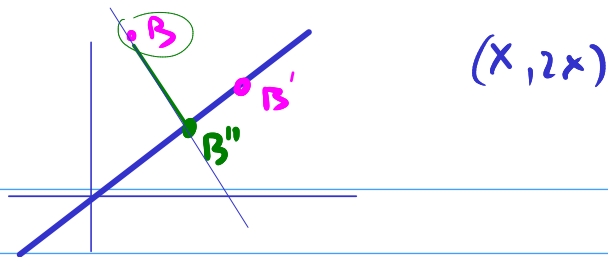
$$\kappa = [P; U_1] \quad \pi = [Q; W_1]$$

$$\pi = [P, U_1 \oplus W_1] \quad \pi' = [Q, U_1 \oplus W_1]$$

Sistemi lineari di minimi quadrati.

$$AX = B \quad \text{compatibile} \Leftrightarrow B \in \mathcal{L}_c(A)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B \in \mathcal{L} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$



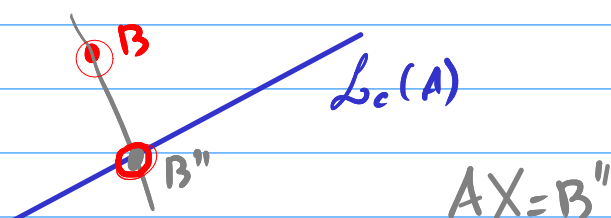
dato $AX=B$ incompatibile $\rightarrow$ approssimarlo con "il miglior sistema lineare compatibile possibile".

$\downarrow$
cerchiamo il vettore dei termini noti più vicino possibile a quello dato ma che vada bene.

RISOLVIAMO INVECE CHE $AX=B$, $AX=B''$

con B'' proiezione ortogonale di B
sul sottospazio affine $[0, L_c(A)]$

come scrivere il nuovo sistema lineare.



OSSERVIAMO CHE $\vec{BB''}$ deve essere ortogonale alle colonne di A

$$\Rightarrow \boxed{{}^t A (\vec{BB''}) = \underline{0}}$$

è anche vero che $B'' = AX$ dove X è la soluzione che cerchiamo

$${}^t A (AX - B) = \underline{0} \quad AX - B = \vec{BB''}$$

10 DEVO RISOLVERE

$$\boxed{{}^t A A X = {}^t A B}$$

forma normale
del sistema.

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$AX = B$ non compat.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2X = 3 \quad X = \frac{3}{2}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$AX = B$ incompat.

$$\boxed{{}^t A A X = {}^t A B}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$2x + 4y = 1$$

problemi di interpolazione.

Def: In $A_2(K)$ o $E_2(\mathbb{R})$ si dice curva
algebraica di ordine n l'insieme dei punti

le cui coordinate (x, y) soddisfano un'equazione

$$f(x, y) = 0$$

ove f è un polinomio di

grado n (non costante) in x e y .

In generale scriverò $V(f) := \{(x,y) \mid f(x,y)=0\}$.

v

problemi con la definizione

- 1) dipende dall'anzì fissato un riferimento
- 2) una curva non è caratterizzata dall'insieme dei suoi punti.

in $E_2(\mathbb{R})$.

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$$

Se voi partite da una retta e trovate tante equazioni $f(x,y)=0$ tali che $V(f)=\emptyset$

$$V(f) = \emptyset$$

$$f(x,y) = 3x + 7y + 5$$

$$V(f) = \text{retta.}$$

$$h(x,y) = (3x + 7y + 5)^2$$

$$g(x,y) = (3x + 7y + 5)(x^2 + y^2 + 1)$$

$$V(g) = \text{retta?}$$

NON c'è una corrispondenza diretta fra equazioni e l'insieme dei punti.

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$V(f) = \{(0,0)\}$$

- 1) per noi si parte dall'eq. e si considera l'insieme dei punti come curva.
- 2) per quanto riguarda il problema della mancata corrispondenza fra insiemi di punti che nascono da eq. algebriche e

equazioni $\rightarrow$ lavoreremo in $\mathbb{C}$ invece che in $\mathbb{R}$.

In particolare su $\mathbb{C}$, $V(f) \neq \emptyset$ per f non costante.

Def. Una curva algebrica $V(f)$ è detta reale se $f(x, y)$ è un polinomio non costante in x e y a coeff in $\mathbb{R}$.

Un punto di $A_2(\mathbb{C})$ è detto reale se

$$P = (x, y) \quad \text{e} \quad P = \bar{P} \quad \text{ovvero} \quad \bar{P} = (\bar{x}, \bar{y})$$

ovvero se le coordinate di P sono reali.

$$A_2(\mathbb{R}) \subseteq A_2(\mathbb{C})$$

N.B. $V(f)$ curva algebrica reale $\Rightarrow$

$$\forall P \in V(f) \text{ si ha anche } \bar{P} \in V(f)$$

$$\begin{aligned} \text{Infatti } P \in V(f) &\Rightarrow f(x_P, y_P) = 0 \Rightarrow \overline{f(x_P, y_P)} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(\bar{x}_P, \bar{y}_P) = 0 \Rightarrow \bar{P} \in V(f) \quad \square \end{aligned}$$

L'operazione di considerare $AG(n, \mathbb{R})$ come sottoinsieme di $AG(n, \mathbb{C})$ è detta complettizzazione.