

Studiare la geometria affine mediante
la teoria dei sistemi lineari.

- 1) Dato uno spazio affine $A_n(K)$ e un riferimento affine $\Pi=(O,B)$ di $A_n(K)$ abbiamo un isomorfismo

$$\psi_\Pi: A_n(K) \rightarrow AG(n, K)$$

- 2) Dato un sistema lineare compatibile $AX=B$ in n incognite

$$\text{L'insieme } S = \{X \in AG(n, K) \mid AX=B\} =$$

$$= [X_0; \ker(A)]$$

ove X_0 = soluzione particolare del sistema.

→ rette in $AG(2, K)$ ed in $AG(3, K)$

• In $AG(2, K)$ una retta è descritta da un'equazione
 $ax+by+c=0$

con $(a,b) \neq (0,0)$.

• In $AG(3, K)$ una retta è descritta da un sistema

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \quad \text{con } \text{rk} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = \text{rk} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2$$

Le posizioni reciproche di 2 rette si studiano
studiando i sistemi associati.

$$r: ax+by+c=0$$

$$s: a'x+b'y+c'=0$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} \text{rk}(A) & \text{rk}(A|B) & & \\ \hline 1 & 1 & \infty^1 & r=s \\ 1 & 2 & 0 & r \parallel s \\ 2 & 2 & 1 & r \cap s = \{P\} \end{array}$$

Nello spazio $n=3$

→ 4 equazioni
in 3 incognite

$\text{rk}(A)$	$\text{rk}(A B)$		
2	2	∞^2	$k=1$
2	3	0	$\pi // \sigma \quad \pi \neq \sigma$
3	3	1	$\pi \cap \sigma = \{P\}$
3	4	0	$\pi \cap \sigma = \emptyset$ seguenti.

si distinguono i 2 casi
in cui il sistema è incompatibile.

$n=3$ piani in $AG(3, k)$.

$$\pi: ax + by + cz + d = 0 \quad \text{con } (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

posizione reciproca di 2 piani π, σ

→ li mettiamo a sistema

→ sistema di 2 eq. in 3 incognite

$\text{rk}(A)$	$\text{rk}(A B)$		
→ 1	1	∞^2	$\pi = \sigma$
1	2	0	$\pi // \sigma$
→ 2	2	∞^2	$\pi \cap \sigma = \pi \cap \sigma$

se $\text{rk}(A) = 1 \Rightarrow$ le eq. omogenee associate a π
e a σ hanno le stesse soluzioni
 $\Rightarrow \pi // \sigma$

N.B. • due piani se si intersecano, ^{in $AG(3, k)$} hanno in comune
almeno una retta.

• due piani disgiunti in $AG(3, k)$ sono sempre
paralleli.

posizione reciproca di una retta ed un piano in $AG(3, k)$

$$\pi_0 \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \quad rk \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = rk \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = ?$$

$$\pi : a''x+b''y+c''z+d''=0 \quad (a'', b'', c'') \neq (0,0,0)$$

METTIAMO A SISTEMA $\rightarrow$ 3 equazioni in 3 incognite

$rk(A)$	$rk(A \pi)$		
2	2	∞^2	$\pi \subseteq \pi$
2	3	0	$\pi // \pi$
3	3	1	$\pi \cap \pi = \{P\}$

OSS 1) $|rk(A)| \in \{0, 1, \infty^2\}$ punti

2) se $rk(A)=2 \Rightarrow$ l'equazione $a''x+b''y+c''z=0$ (*)

è c. lineare delle equazioni

$$(A) \begin{cases} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ogni soluzione di (A) è soluzione di (*) e quindi la direzione di π è contenuta nella giacitura di π
 $\Rightarrow \pi // \pi$.

Esercizio (se volete) studiare le posizioni reciproche dei sottospazi lineari di $AG(4, k)$.

opportuni insiemi di rette o piani in $AG(2, k)$ o $AG(3, k)$.

OSS: sia $ax+by+c=0$ l'eq. di una retta in $AG(2, k)$.

$\Rightarrow \forall \alpha \neq 0 \quad \alpha(ax+by+c)=0$ descrive la medesima retta.

[Una retta è identificata da 3 coeff. a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.

↓
le rette del piano sono " ∞^2 "

Def. Si dice fascio proprio di rette in $AG(2, K)$ l'insieme di tutte le rette che passano per un punto $P = (x_0, y_0)$ fissato, detto centro del fascio.

Si dice fascio improprio di rette in $AG(2, K)$ l'insieme di tutte le rette parallele ad una retta data.

[Si dice fascio un insieme di ∞^2 enti geometrici che soddisfano condizioni lineari].

Eq. del fascio proprio di centro $P = (x_0, y_0)$.

$$r: ax + by + c = 0$$

$$\text{impone } P \in r \Rightarrow ax_0 + by_0 + c = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = -ax_0 - by_0$$

e la retta generica del fascio ^{proprio} ha eq.

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0} \quad \infty^2 \text{ rette}$$

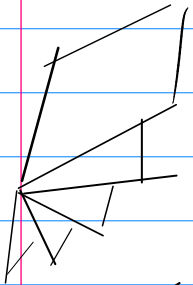
$$\text{non la retta } y = y_0 \quad \vee \quad \begin{cases} (x - x_0) + \xi(y - y_0) = 0 \\ \xi \in K \end{cases}$$

dividendo per a , quando $a \neq 0$.

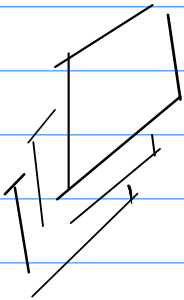
$r: ax + by + c = 0$ assegnata
 $s \in \mathcal{F}$ $s \parallel r$ ma $s \parallel r \Leftrightarrow s: a'x + b'y + c' = 0$
 con $\kappa \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1$

$\Rightarrow s$ ha equazione del tipo $ax + by + \xi = 0$
 $\xi \in \mathbb{K}$

In $AG(3, \mathbb{K})$: si dice fascio proprio di piani



l'unione di tutti i piani che contengono una retta assegnata.



fascio improprio di piani, l'unione di tutti i piani paralleli ad un piano dato.

Si dice stella propria di rette, tutte le rette che passano per un punto;
stella propria di piani, tutti i piani che passano per un punto.

Stella impropria di rette, tutte le rette parallele ad una retta data e stella impropria di piani, tutti i piani la cui equazione contiene una data direzione.

Fascio $\rightarrow \infty^1$

Stelle $\rightarrow \infty^2$

Equazioni per un fascio proprio di piani:

$$\tau_0 \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \quad \pi \text{ tale che } \tau \geq \pi$$

vogliamo π la cui equazione aggiunta alle eq. di τ non cambi il rango del sistema

cioè $\tau_0 \cap \pi = \tau_0 \rightarrow$ l'equazione di π deve essere

c. lineare delle eq. che descrivono τ_0

$$\pi: \alpha(ax + by + cz + d) + \beta(a'x + b'y + c'z + d') = 0$$

$$(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$$

∞^2 piani.

N.B. ogni 2 piani distinti del fascio di support.
 τ_0 si intersecano proprio in τ_0 .

$$\begin{cases} x = 2 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

$$\alpha(x-2) + \beta(y+z-3) = 0$$

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - y - z = -1 \end{cases}$$

fascio improprio.

$$\tau: ax + by + cz + d = 0$$

$$\sigma // \tau \Leftrightarrow \sigma: a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

$$\tau_k \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a & b & c \end{pmatrix} = 1$$

∞^2

$\Rightarrow$

$$\sigma: ax + by + cz + \xi = 0 \quad \xi \in \mathbb{K}$$

Stella propria di piani $P = (x_0, y_0, z_0)$

$$\pi: ax + by + cz + d = 0$$

$$P \in \pi \Leftrightarrow ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$$

$$\Leftrightarrow d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$$

$$\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

∞^2 piani

Stella impropria di piani

$$\pi: ax + by + cz + d = 0$$

$$\mathcal{L}((\ell, m, n)) \in \ker([a \ b \ c])$$

$$a\ell + bm + cn = 0$$

$$c = \frac{-a\ell - bm}{n}$$

$n \neq 0$

$$n(ax + by - (a\ell + bm)z + d) = 0$$

∞^2 piani

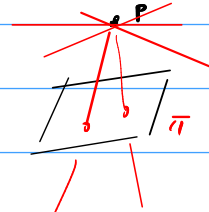
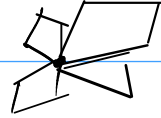
Stella propria di rette

$$\pi \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \quad P = (x_0, y_0, z_0) \in \pi$$

sistema in 8 incognite $a \ b \ c$
 $a' \ b' \ c'$

e 2 equazioni $\rightarrow$ si ottengono
coppie di piani che appartengono tutti alla

stessa stella; in particolare ω^4 coppie di piani. D'altro canto i piani che appartengono ad un medesimo fascio determinano la stessa retta $\rightarrow \omega^2$ rette.



$\forall \varrho \in \pi \exists!$ retta della stella di centro P passante per ϱ .

rette della stella di centro P =

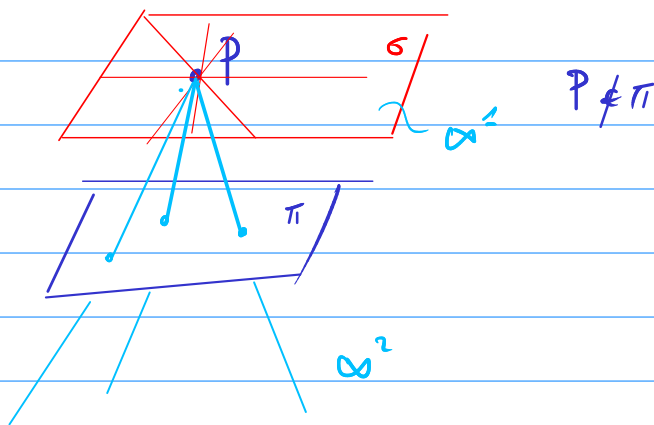
rette incidenti con π in un punto (ω^2)

+ rette per P parallele a π , nessuna retta

contenute nel fascio di centro P contenuto nel piano σ per P parallelo a $\pi \Rightarrow$

ω^2 rette

$$\Rightarrow \# \text{ totale rette} = \omega^2 + \omega^2 = \omega^2$$



similmente si

procede per le stelle improprie.

Def: 3 punti in $AG(2, k)$ sono detti allineati se $\exists$ una retta che li contiene

$$P = (x_0, y_0) \quad Q = (x_1, y_1) \quad R = (x_2, y_2)$$

$$P, Q, R \text{ allineati} \Leftrightarrow \vec{PQ} = \lambda \vec{PR}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix} = 0$$

↓

$$0 = (x_2 - x_0)(y_1 - y_0) - (x_1 - x_0)(y_2 - y_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

In $AG(3, k)$, 4 punti sono complessivi se esiste un piano che li contiene.

$$P = (x_0, y_0, z_0) \quad Q = (x_1, y_1, z_1) \quad R = (x_2, y_2, z_2) \\ S = (x_3, y_3, z_3)$$

la condizione è che $\dim L(\vec{PQ}, \vec{PR}, \vec{PS}) = 2$

$$\text{rk} \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 & x_3 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 & y_3 - y_0 \\ z_1 - z_0 & z_2 - z_0 & z_3 - z_0 \end{pmatrix} \leq 2$$

det matrice = 0

$$\det \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

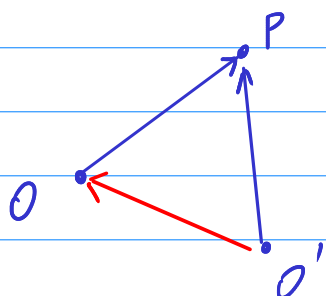
Il piano per P, Q ed R ha eq. $\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x \\ y_0 & y_1 & y_2 & y \\ z_0 & z_1 & z_2 & z \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$

oss: Noi abbiamo studiato la geometria affine introducendo un riferimento affine sostanzialmente arbitrario.

$$\Gamma = (O, B)$$

di riferimenti affini possibili
e ne sono infiniti.

Cosa succede se cambiamo riferimento?



|| OTTENIAMO SEMPRE elementi di K^n come coordinate dei punti.

$$\Gamma = (O, B)$$

$$\Gamma' = (O', B')$$

due rif. affini

le coordinate di P in Γ sono le componenti del vettore $\vec{OP}$ rispetto a B.

o in Γ' le componenti di $\vec{O'P}$ rispetto a B'

$$\vec{O'P} = \vec{O'O} + \vec{OP}$$

$$\sum p_i' \vec{e}_i' = -\sum o_i \vec{e}_i + \sum p_i \vec{e}_i = *$$

↓
rispetto a B'

↓
rispetto a B.

$$\begin{aligned} \vec{O'P} &= \vec{O'O} + \vec{OP} = \\ &= -\vec{OO'} + \vec{OP} \end{aligned}$$

P ha coordinate $(p_1, \dots, p_n)$ rispetto a Γ
 $(p_1', \dots, p_n')$ rispetto a Γ'

O ha coordinate $(o_1, \dots, o_n)$ rispetto a Γ .

$$* \sum (p_i - o_i) \vec{e}_i = \sum p_i' \vec{e}_i'$$

sia T la matrice tale che $T E' = E$

$$[p_1 - o_1 \quad p_2 - o_2 \quad \dots \quad p_n - o_n] E = [p'_1 \quad p'_2 \quad \dots \quad p'_n] E'$$

||

$$[p_1 - o_1 \quad p_2 - o_2 \quad \dots \quad p_n - o_n] T E' = [p'_1 \quad p'_2 \quad \dots \quad p'_n] E'$$

$${}^t T \begin{pmatrix} p_1 - o_1 \\ | \\ p_n - o_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_1 \\ | \\ p'_n \end{pmatrix}$$

↙ cambiamento di riferimento.

N.B. compare una matrice (T) ma anche un vettore. (word. di o' rispetto ad o)

$$\begin{pmatrix} p'_1 \\ | \\ p'_n \end{pmatrix} = {}^t T \begin{pmatrix} p_1 \\ | \\ p_n \end{pmatrix} + \bar{V} \quad \text{ove } \bar{V} = -{}^t T \begin{pmatrix} o_1 \\ | \\ o_n \end{pmatrix}$$

→ Spazi euclidei (spazi affini + distanze euclidee)

— IR —

→ omologues proiettivi e complessificazione

In $AG(2, k)$ sia $P = (x_1, y_1)$ $Q = (x_2, y_2)$

$$\bar{r} = (l, m).$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

eq. della retta per P con direzione $L((l, m))$

retta per (x_1, y_1) e (x_2, y_2) ?

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & l \\ y-y_1 & m \end{vmatrix} = 0$$

$$m(x-x_1) - l(y-y_1) = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & l & x \\ y_1 & m & y \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x(-m) + y \cdot l + x_1 m - y_1 l = 0$$

$$m(x_1 - x) - l(y_1 - y) = 0$$

retta di
 det (l,m) per
 (x₁, y₁)

stessa eq.