

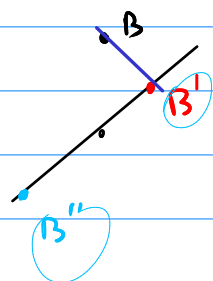
Geometria affine (euclidea)

- 1) ci consente di rappresentare le soluzioni di sistemi lineari non omogenei
- 2) è una applicazione dell'algebra lineare che descrive la geometria Euclidea Classica (in modo rigoroso)
- 3) l'ambiente geometrico consente di formalizzare bene le nozioni di distanza/approssimazione e vedere come applicarle.

$AX = y$ e si dice trovare l'insieme degli y tali che il sistema lineare sia compatibile

$$y \in L_c(A)$$

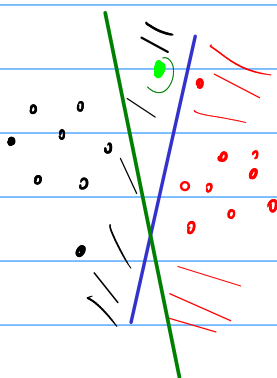
$$B \in \mathbb{R}^2 \setminus L_c(A)$$



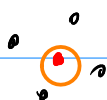
$AX = B$ non compat.

$AX = B'$ con $B' \in L_c(A)$

e B' il più vicino possibile a B



support vector machines.

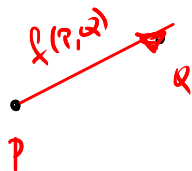


Def. Spazio affine $AF = (A, f: A \times A \rightarrow V_n(K))$

ove $A =$ insieme (di punti) $\neq \emptyset$

$V_n(K) =$ spazio vettoriale di dim $= n$ sul campo K

$$f: A \times A \rightarrow V_n(K)$$



tales that

1) $\forall P \in A, \forall \vec{v} \in V_n(\mathbb{K}) \exists! Q \in A$ tale che

$$f(P, Q) = \vec{v}$$

si dice che il punto Q è il traslato secondo il vettore $\vec{v}$ del punto P .

Sottriveremo anche $\boxed{\vec{v} = \overrightarrow{PQ}}$ oppure

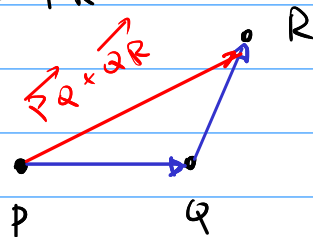
$$Q = P + \vec{v}$$

↑ punto ↑ punto ↑ vettore

N.B. la proprietà 1 ci garantisce che la funzione

$$\tau_{\vec{v}} : \begin{cases} A \rightarrow A \\ X \rightarrow X + \vec{v} \end{cases} \text{ è ben definita.}$$

2) $\forall P, Q, R \in A : \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$



Esempio di geometria affine $AG(n, \mathbb{K}) = (\mathbb{K}^n, f : \begin{cases} \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n \\ (P, Q) \rightarrow Q - P \end{cases})$

è uno spazio affine

verifichiamo $\forall P \in \mathbb{K}^n \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{K}^n$
 $P = (p_1 \text{ --- } p_n) \quad \vec{v} = (v_1 \text{ --- } v_n)$

vediamo quanti $Q = (q_1 \text{ --- } q_n) \in \mathbb{K}^n$ tali che

$$f(P, Q) = Q - P = (q_1 - p_1 \text{ --- } q_n - p_n) = (v_1 \text{ --- } v_n)$$

$$q_1 = v_1 + p_1$$

$$q_n = v_n + p_n \Rightarrow \exists! Q \text{ tale che } \vec{PQ} = \vec{v}$$

$$\downarrow$$

$$q_n = v_n + p_n$$

$$Q = P + \vec{v}$$

$$2) \quad P = (p_1 \dots p_n) \quad Q = (q_1 \dots q_n) \quad R = (r_1 \dots r_n)$$

$$\vec{PQ} + \vec{QR} = (Q - P) + (R - Q) = R - P = \vec{PR}$$

□

proprietà di AF (= spazio affine).

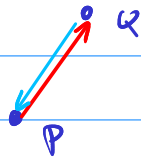
$$1) \quad \forall P \in A: \quad \vec{PP} = \vec{0} \quad \text{infatti} \quad \vec{PP} + \vec{PP} = \vec{PP} \quad \text{per la 2,}$$

$$\text{quindi sottraendo} \quad \vec{PP} = \vec{0} \quad \text{da} \quad \text{e} \quad \text{da}$$

$$\vec{PP} = \vec{0}$$

$$2) \quad \forall P, Q \in A: \quad \vec{PQ} = \vec{0} \Leftrightarrow P = Q \quad \left(\begin{array}{l} \text{se } P = Q \Rightarrow \vec{PQ} = \vec{0} \\ \text{se } \vec{PQ} = \vec{0} \Rightarrow Q = P + \vec{0} = P \end{array} \right)$$

$$3) \quad \vec{PQ} = -\vec{QP}$$



$$\vec{PQ} + \vec{QP} = \vec{PP} = \vec{0} \quad \text{e quindi}$$

$$\vec{PQ} = -\vec{QP}$$

□

Def di Sottospazio affine di $AF = (A, f: A \times A \rightarrow V_n(K))$

$S \subseteq A$ con $S \neq \emptyset$ si dice sottospazio affine di AF se $\exists W \leq V_n(K)$ tale che

$$(S, f|_{S \times S}^W: S \times S \rightarrow W)$$

è uno spazio affine.

Oss: Sia $(A, f: A \times A \rightarrow V_n(K))$ uno spazio affine. Allora esiste una biiezione fra A e $V_n(K)$.

NOTIAMO CHE fissato $P \in A$, $\forall Q \in A$ abbiamo esattamente un $\vec{v}$ tale che $f(P, Q) = \vec{v} \Rightarrow$ la funzione

$$\psi_P: \begin{cases} A \rightarrow V_n(1k) \\ Q \rightarrow \vec{PQ} \end{cases} \text{ è iniettiva.}$$

d'altro canto per la proprietà (c) $\forall \vec{v} \in V_n(1k)$

$$\exists Q \text{ tale che } f(P, Q) = \vec{v} \text{ cioè } \psi_P(Q) = \vec{v}$$

$\Rightarrow \psi_P$ è suriettiva $\Rightarrow \psi_P$ è biiettiva $\square$

Sottospazi lineari

Sia $P \in A$, $W \subseteq V_n(1k)$. Si dice sottospazio lineare di AF di origine P e sottospazio di

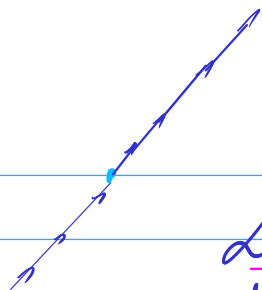
traslazione W l'insieme

$$T = [P; W] = \{ Q \in A \mid \vec{PQ} \in W \}.$$

Def In funzione di $\dim(W)$ si adottano le seguenti terminologie.

$\dim(W)$	sottospazio $[T; W]$	$[P; W] = \{P\}$ W
0	punto	//
1	retta	direzione della retta
2	piano	giacitura del piano
3	solido	sottospazio di traslazione associati.
$n-1$	iperpiano	

In generale poniamo $\dim T = \dim W$



u

Lemma: Sia $T = [P; W]$ un sottospazio lineare di AF, e sia $Q \in T$.

Allora $T = [Q; W]$.

Ogni punto di T può essere preso come una origine.

Dim: Sia $R \in [P; W] \Rightarrow \vec{PR} \in W$ ma anche
 $\vec{PQ} \in W \Rightarrow -\vec{PQ} + \vec{PR} = \vec{QP} + \vec{PR} = \vec{QR} \in W$
 $\Rightarrow R \in [Q; W]$

Viceversa se $R \in [Q; W] \Rightarrow \vec{QR} \in W$ ma
 $\vec{PQ} \in W \Rightarrow \vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR} \in W \Rightarrow R \in [P; W]$

Teorema: S è un sottospazio affine di AF $\Leftrightarrow S$ è un sottospazio lineare di AF

Dim S sottospazio affine $\Rightarrow \exists W \subseteq V_n(K)$ tale che

$(S, f_{S \times S}^W: S \times S \rightarrow W)$ è spazio affine.

$\Rightarrow \forall P, Q \in S, \vec{PQ} \in W \Rightarrow S \subseteq [P; W]$.

D'altra parte se $X \in [P; W] \Rightarrow X = P + \vec{w}$

con un $\vec{w} \in W \Rightarrow X \in S$ in quanto ogni traslato con vettori di W deve stare in S .

Viceversa: Sia $T = [P; W] \Rightarrow$ consideriamo

$$(T, \begin{cases} T \times T \rightarrow W \\ (x, y) \mapsto f(x, y) \end{cases})$$

faciamo vedere che T è sottospazio affine.

In fatti $\forall x, y \in T$ abbiamo

$$f(x, y) = \overrightarrow{xy} = \overrightarrow{xP} + \overrightarrow{Py} = \overrightarrow{Py} + (-\overrightarrow{Px}) \in W$$

ma allora vale la prop. 1, cioè f ristretta a T è la funzione che definisce uno spazio affine ed anche la prop. 2 (visto che quella vale $\forall$ coppia di punti). $\square$

Esempio in $AG(n, \mathbb{K})$ $A = \mathbb{K}^n$ $V_n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n$

sottospazio lineare, $[P; W] = \{Q \mid \overrightarrow{PQ} \in W\} =$

$$= \{Q \mid Q = P + \bar{w} \mid \bar{w} \in W\} =$$

$$= \{P + \bar{w} \mid \bar{w} \in W\} =$$

$$= \underbrace{(P_1, P_2, \dots, P_n)}_P + \underbrace{W}_{\text{Ker } A}$$

In $AG(n, \mathbb{K})$ i sottospazi lineari (e quindi pure quelli affini) corrispondono agli insiemi delle soluzioni di un sistema lineare compatibile (non necessariamente omogeneo).

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

$\rightarrow \infty^2$
corrisponde ad una
retta in $AG(3, \mathbb{K})$

Supponiamo di avere 1 equazione lineare in n incognite compatibile e di rango 1.

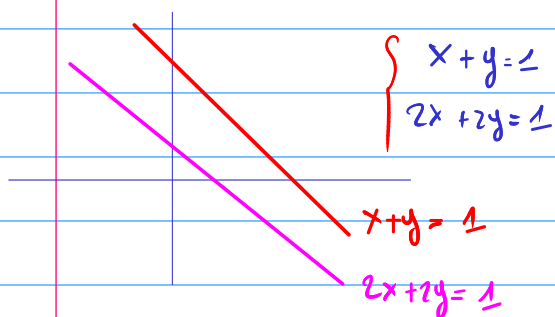
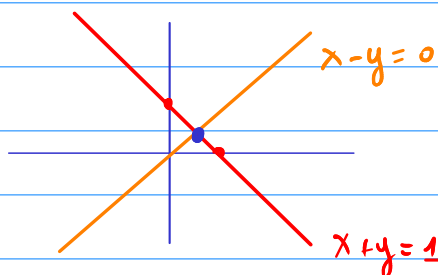
L'insieme delle sue soluzioni ha ∞^{n-1} elementi e dunque si vede come un sottospazio lineare di dim $= n-1$ in $AG(n, \mathbb{K})$ ↓
è un iperpiano.

Geometricamente un insieme di m equazioni in n incognite si studia come l'intersezione di m iperpiani in $AG(n, \mathbb{K})$

Esempio $n=2$

$\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=0 \end{cases}$$

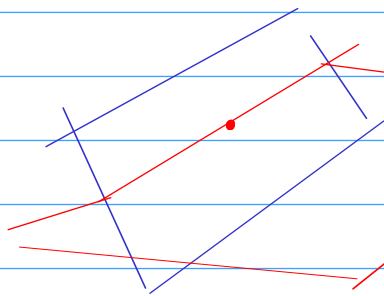


Def: Due sottospazi $[P, W]$, $[Q, U]$ sono detti lineari paralleli $\Leftrightarrow W \subseteq U$ oppure $U \subseteq W$.

Teorema: Siano $[P, W]$, $[Q, U]$ due sottospazi lineari e supponiamo che $[P, W] \cap [Q, U] \neq \emptyset$

Allora preso $Z \in [P; W] \cap [Q; U]$ si ha

$$[P; W] \cap [Q; U] = [Z; W \cap U]$$



In particolare l'intersezione di 2 sottospazi lineari $[0]$ è vuota $[0]$ è anche essa un sottospazio lineare con sottospazio di traslazione pari all'intersezione dei sottosp. di traslazione.

D'M: OSSERVAMO CHE $[Z; U \cap W] \subseteq [P; W] \cap [Q; U]$ perché $[P; U] = [Z; U]$ in quanto $Z \in [P; W]$ e possiamo prendere l'origine che vogliamo

$[Z; W \cap U] \subseteq [Z; W] \Rightarrow$ ok.
sicuramente per $[Z; W \cap U] \subseteq [Z; U] = [Q; U]$

viceversa: supponiamo $X \in [P; W] \cap [Q; U]$

$$\Rightarrow \vec{P}X \in W \text{ e } \vec{Q}X \in U$$

$$\vec{Z}P \in W \text{ e } \vec{Z}Q \in U$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{Z}P + \vec{P}X = \vec{Z}X \in W \\ \vec{Z}Q + \vec{Q}X = \vec{Z}X \in U \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{Z}X \in U \cap W$$

$$\text{cioè } X \in [Z; U \cap W]$$

□

Riferimenti Affine

$$AF(A, f: A \times A \rightarrow V_n(K))$$

fissiamo $\Gamma = (\mathcal{O}_A, \mathcal{B})$

$\downarrow$ base di $V_n(K)$
 $(\bar{b}_2, \dots, \bar{b}_n)$

$$\varphi: \begin{cases} A \rightarrow K^n \\ P \rightarrow (\alpha_2, \dots, \alpha_n) \text{ ove} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OP} = \alpha_2 \bar{b}_2 + \dots + \alpha_n \bar{b}_n$$

$AG(n, K)$

$$V_n(K)$$

$$\mathcal{B} = (\bar{b}_2, \dots, \bar{b}_n)$$

$$\xrightarrow{\hspace{1cm}} K^n$$

$$\bar{v} \longrightarrow \alpha_2 \bar{b}_2 + \dots + \alpha_n \bar{b}_n$$

$$\downarrow$$

$$(\alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n$$