

Forma bilineare simmetrica, definita positiva
prodotto scalare

$$\forall \vec{v} \in V_n(\mathbb{R}) \quad \vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0 \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \geq 0$$
$$\vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \underline{0}$$

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$$

DIM Se $\vec{w} = \underline{0}$ $\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ e $\|\vec{w}\| = 0$
 $\Rightarrow$ la disuguaglianza vale

Supponiamo $\vec{w} \neq \underline{0}$ e consideriamo il vettore

$$\vec{v} + \alpha \vec{w}$$

$$(\vec{v} + \alpha \vec{w}) \cdot (\vec{v} + \alpha \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{v} + 2\alpha \vec{v} \cdot \vec{w} + \alpha^2 \vec{w} \cdot \vec{w} =$$
$$= \|\vec{v}\|^2 + 2\alpha (\vec{v} \cdot \vec{w}) + \alpha^2 \|\vec{w}\|^2 \geq 0 \quad (*)$$

polinomio di II grado
in α

che $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ non cambia mai
di segno

$$\Rightarrow \frac{\Delta}{4} \leq 0 \Rightarrow (\vec{v} \cdot \vec{w})^2 - \|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 \leq 0$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{w})^2 \leq \|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2$$

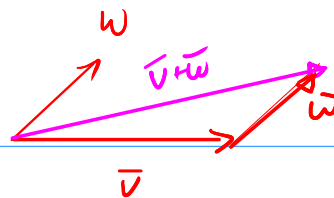
estraggo le radici quadrate

$$|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$$

□

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$$\|\bar{v} + \bar{w}\| \leq \|\bar{v}\| + \|\bar{w}\|$$



DIM

$$\begin{aligned} \|\bar{v} + \bar{w}\|^2 &= (\bar{v} + \bar{w}) \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{v} \cdot \bar{v} + 2\bar{v} \cdot \bar{w} + \bar{w} \cdot \bar{w} = \\ &= \|\bar{v}\|^2 + 2(\bar{v} \cdot \bar{w}) + \|\bar{w}\|^2 \leq \|\bar{v}\|^2 + 2|\bar{v} \cdot \bar{w}| + \|\bar{w}\|^2 \leq \\ &\leq \|\bar{v}\|^2 + 2\|\bar{v}\| \cdot \|\bar{w}\| + \|\bar{w}\|^2 = (\|\bar{v}\| + \|\bar{w}\|)^2 \end{aligned}$$

estrapolando le radici di quantità non negative si ottiene

$$\|\bar{v} + \bar{w}\| \leq \|\bar{v}\| + \|\bar{w}\|$$

□

NOTA BENE

$$-1 \leq \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\|\bar{v}\| \cdot \|\bar{w}\|} \leq 1 \quad \bar{v}, \bar{w} \neq \underline{0}$$

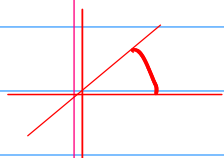
Il valore $\frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\|\bar{v}\| \cdot \|\bar{w}\|}$ è detto coseno dell'angolo fra $\bar{v}$ e $\bar{w}$

e vediamo che

se $\bar{v} \perp \bar{w} \Rightarrow \cos \theta = 0$

se $\bar{v} = \alpha \bar{w}$ con $\alpha > 0 \Rightarrow \cos \theta = 1$

se $\bar{v} = \alpha \bar{w}$ con $\alpha < 0 \Rightarrow \cos \theta = -1$



$$\bar{v} = 2\bar{w}$$

$$\frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\|\bar{v}\| \cdot \|\bar{w}\|} = \frac{2\bar{w} \cdot \bar{w}}{\|2\bar{w}\| \cdot \|\bar{w}\|} = \frac{2\|\bar{w}\|^2}{|2| \|\bar{w}\|^2} = \frac{2}{|2|}$$

Sulla relazione " $\perp$ " (queste cose formano utili anche in geometria per lo studio delle coniche).

Sia $*$: $V_n(\mathbb{K}) \times V_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ un prodotto scalare (non necessariamente definito positivo).

$\bar{v} \in V_n(\mathbb{K})$ è isotropo per $*$ e $\bar{v} \perp \bar{v}$ cioè $(\bar{v}, \bar{v}) = 0$

Sia adesso $A \subseteq V_n^*(\mathbb{K})$. Poniamo

$$A^\perp = \{ \bar{v} \in V_n(\mathbb{K}) : \forall \bar{a} \in A, \bar{a} \perp \bar{v} \}.$$

OSSERVIAMO CHE

1) $A^\perp$ è un sottospazio vettoriale di $V_n(\mathbb{K})$

$$\begin{aligned} \bar{v}, \bar{w} \in A^\perp &\Rightarrow \forall \bar{a} \in A, \bar{a} * \bar{v} = \bar{a} * \bar{w} = 0 \\ &\Rightarrow \bar{a} * (\alpha \bar{v} + \beta \bar{w}) = \alpha (\bar{a} * \bar{v}) + \beta (\bar{a} * \bar{w}) = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

2) Se $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$

$$\begin{aligned} \bar{v} \in B^\perp &\Rightarrow \forall \bar{b} \in B, \bar{v} * \bar{b} = 0 \Rightarrow \forall \bar{a} \in A: \bar{v} * \bar{a} = 0 \\ &\text{perché ogni } \bar{a} \in A \text{ è elemento di } B \\ &\Rightarrow \bar{v} \in A^\perp \end{aligned}$$

3) Sia $A \subseteq V_n^*(\mathbb{K}) \Rightarrow A^\perp = \mathcal{L}(A)^\perp$

chiaramente $A \subseteq \mathcal{L}(A) \Rightarrow \mathcal{L}(A)^\perp \subseteq A^\perp$

d'altro canto ma $\bar{v} \in A^\perp, \forall \bar{x} \in \mathcal{L}(A)$

$$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k \in A : \bar{x} = \alpha_1 \bar{a}_1 + \dots + \alpha_k \bar{a}_k$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \bar{v} * \bar{x} &= \bar{v} * (\alpha_1 \bar{a}_1 + \dots + \alpha_k \bar{a}_k) = \\ &= \alpha_1 (\underbrace{\bar{v} * \bar{a}_1}_0) + \dots + \alpha_k (\underbrace{\bar{v} * \bar{a}_k}_0) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{x} \in \mathcal{L}(A)^\perp$$

4) $A \subseteq A^{\perp\perp}$ (ed in particolare $\mathcal{L}(A) \subseteq A^{\perp\perp}$)

Si $\bar{a} \in A$ e $\forall \bar{b} \in A^{\perp} \Rightarrow \bar{a} * \bar{b} = 0 \Rightarrow \bar{b} * \bar{a} = 0 \quad \forall \bar{b} \in A^{\perp}$
 $\Rightarrow \bar{a} \in (A^{\perp})^{\perp} = A^{\perp\perp} \quad \square$

DOMANDA: quando $A^{\perp\perp} = \mathcal{L}(A)$? $\forall A \subseteq V_n^*(\mathbb{K})$

$\downarrow$ se e solo se

$\dim A^{\perp\perp} = \dim \mathcal{L}(A)$

Esercizio:

In $\mathbb{R}^2$ si trovi un prodotto scalare tale che i vettori $(1, 2)$ e $(0, 3)$ siano una base ortonormale rispetto ad esso.

3 equazioni in 3 incognite

$$\begin{cases} (1, 2) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 & \|(1, 2)\| = 1 \\ (0, 3) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 & \|(0, 3)\| = 1 \\ (1, 2) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 & (1, 2) * (0, 3) = 0 \end{cases}$$

$$(a + 2b \quad b + 2c) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1$$

$$(3b \quad 3c) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \quad (a + 2b \quad b + 2c) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} a + 2b + 2b + 4c = 1 \\ 8c = 1 \\ 3b + 6c = 0 \end{cases}$$

$$c = \frac{1}{8} \quad a = 1 + \frac{8}{8} - \frac{4}{8} = \frac{5}{2}$$

$$b = -\frac{2}{8}$$

è quella con matrice $\begin{pmatrix} \frac{13}{8} & -\frac{2}{8} \\ -\frac{2}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

II

→ come calcolare $A^\perp$ dato A e la matrice di *

Sia $G = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k)$ un insieme di generatori per

$\mathcal{L}(A)$

osserviamo che $\mathcal{L}(A)^\perp = G^\perp = \bigcap_{i=1}^k v_i^\perp$

In seguito i vettori di $G^\perp$ devono essere ortogonali a tutti i vettori di G e dunque essere quelli nell'intersezione degli ortogonali di $\bar{v}_i \forall \bar{v}_i \in G$.

Fissiamo al solito una base B , scriviamo i $\bar{v}_i$ in componenti rispetto a B e sia B la matrice del prodotto scalare.

$$\bar{v}_i = (a_{i1} \ a_{i2} \dots a_{in})$$

$$B(\bar{v}_i, \bar{x}) = (a_{i1} \ a_{i2} \dots a_{in}) B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

una equazione di I grado.
in n incognite.

Quante soluzioni? $\left\{ \begin{array}{l} \text{se } (\alpha_{i1} \dots \alpha_{in}) B \neq 0 \rightarrow \infty^{n-1} \\ \text{se } (\alpha_{i1} \dots \alpha_{in}) B = 0 \rightarrow \infty^n \end{array} \right.$

In particolare se $\det(B) \neq 0$ e $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k)$ è una base di $\mathcal{L}(A)$ noi in questo caso otteniamo k equazioni lineari indipendenti.

Si ha in particolare un sistema lineare

matrice delle comp. di generatori di $\mathcal{L}(A)$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k1} & \dots & \alpha_{kn} \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\tilde{A} \leftarrow$ (matrice)
 $\downarrow$ $\text{rk}(k)$
 $\downarrow$ $\det(B) \neq 0$
 $\text{rk}(\tilde{A}B) \leq \text{rk}(\tilde{A})$

OTTENIAMO UN SISTEMA LINEARE DI RANGO k

$$\Rightarrow \boxed{\dim \mathcal{L}(A)^\perp} = n - \text{rk}(\tilde{A}B) = n - k = \boxed{n - \dim \mathcal{L}(A)}$$

$$\dim \mathcal{L}(A)^{\perp\perp} = n - (\dim \mathcal{L}(A)^\perp) = n - (n - k) = k = \dim \mathcal{L}(A)$$

Se $\det(B) \neq 0 \Rightarrow \mathcal{L}(A)^{\perp\perp} = \mathcal{L}(A)$ $\square$
 perché $\mathcal{L}(A) \subseteq \mathcal{L}(A)^{\perp\perp}$

OSS: Cosa succede se siamo in $\mathbb{K}^n$ e usiamo il prodotto scalare standard, i.e. il prodotto scalare la cui matrice rappresentativa è I ?

$$\tilde{A}Bx = 0 \quad \text{diventa} \quad \tilde{A}x = 0$$

In particolare ogni sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ | \\ a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases} \quad \text{si può leggere come}$$

$$\begin{cases} (a_{11} \dots a_{1n}) \cdot (x_1 \dots x_n) = 0 \\ | \\ (a_{k1} \dots a_{kn}) \cdot (x_1 \dots x_n) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow S =$ insieme delle soluzioni di $AX = \underline{0}$ e

proprio $\left[S = A_R^\perp = \text{complemento ortogonale in } \mathbb{K}^n \right.$
 $\left. \text{dell'insieme delle righe di } A \right]$

N.B. Dal fatto che $A_R^\perp = L(A_R)^\perp$ si vede anche che manipolazioni sulle righe di un sistema lineare omogeneo che non cambino lo s.v. delle righe generato producano sempre sistemi equivalenti a quello di partenza.

Esercizio Sia $W = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid \begin{matrix} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{matrix} \}$

Trovare un insieme di generatori per W .

$\rightarrow$ calcoliamo un insieme di generatori di $W = ((1, 2, -1), (0, 1, 1))^\perp$

$$W^\perp = ((12-1), (011))^{\perp\perp} = L((12-1), (011))$$

Trovare le equazioni che descrivono il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ dato da

$$W = L((1201), (0110))$$

$$W = (W^\perp)^\perp$$

ma W è l'ortogonale dello sp. vettoriale generato dalle righe della mat. incompleta del sistema che lo descrive.

$\Rightarrow W^\perp$ è generato proprio da queste righe.

$\rightarrow$ le equazioni che descrivono W le posso trovare a partire da un sistema di equazioni per $W^\perp$

$$W = L((1201), (0110))$$

$$W^\perp = L(\{\bar{x} \mid \bar{x} \cdot (1201) = 0, \bar{x} \cdot (0110) = 0\})$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -x_4 - 2x_2 \\ x_3 = -x_2 \end{cases}$$

$$W^\perp = L((-2 \ 1 \ -1 \ 0), (1 \ 0 \ 0 \ -1))$$

$$W = \{v \mid -2v_1 + v_2 - v_3 = 0, v_1 - v_4 = 0\} \quad \square$$

Che legame c'è fra W e $W^\perp$? $\dim W^\perp = n - \dim W$
 DIPENDE DAL PRODOTTO SCALARE se $\det(B) \neq 0$

Se $*$ è un prodotto scalare definito positivo in $V_n(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow W \oplus W^\perp = V_n(\mathbb{R})$$

significa che $W^\perp$ è
un complemento diretto di W

↓
sottospazio X è sempre diretto con
 W e vale $W \oplus X = V_n(\mathbb{R})$

DIM $*$ prodotto scalare definito positivo

$$\text{se } \bar{w} \in W \cap W^\perp \Rightarrow \bar{w} * \bar{w} = 0 \Rightarrow \bar{w} = 0 \Rightarrow W \oplus W^\perp \\ \text{perché } W \cap W^\perp = \{0\}$$

per dimostrare che $W \oplus W^\perp = V_n(\mathbb{R})$ mostriamo che

$$\dim W^\perp = n - \dim(W)$$

2 modi (o piacere).

1) osserviamo che se $*$ è definito positivo
 $\Rightarrow \text{rk}(B) = n$ ove B è una qualsiasi
matrice che lo rappresenta.

Infatti se così non fosse $\text{Ker}(B) \neq \{0\}$

$$\Rightarrow \exists y \text{ tale che } y \neq 0 \text{ e } By = 0$$

$$\Rightarrow {}^t y B y = 0 \Rightarrow \| \bar{y} \|^2 = 0 \text{ ove } \bar{y} \text{ è il} \\ \text{vettore che è rappresentato da } y \\ \text{con } \bar{y} \neq 0$$

$$\text{MA se } \text{rk}(B) = n \Rightarrow \dim W^\perp = n - \dim W \quad \square$$

Altro
modo

2) prendiamo W e sia B_W una sua
base. Applichiamo G/S per ottenere

una base di W ortonormale. B'_W .

Completiamo B'_W a base B'_V di $V_n(\mathbb{K})$ aggiungendo $n-k$ vettori in E .
Applichiamo G/S a B'_V .

I primi k vettori di B'_V vengono lasciati invariati (perché già ortonormali).

I vettori aggiunti di E vengono ortonormalizzati in modo da ottenere una nuova sequenza

$$B''_V = B'_W \cup E' \quad \text{con } E' \neq E$$

osserviamo che $L(E') \cap W =$

$$= L(E') \cap L(B'_W) = \{0\}$$

quindi $L(E') = X$ è in somma diretta con W . Inoltre $\forall$ vettore di E'

(base di X) è ortogonale a tutti i vettori di B'_W e quindi a tutti i

vettori di $W \Rightarrow$ ogni vettore di X

è ortogonale ad ogni vettore di W

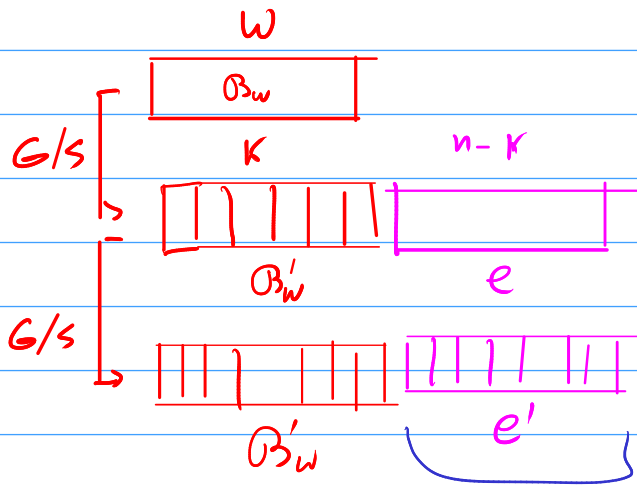
$$\Rightarrow X \subseteq W^\perp$$

ma $\dim(X) = n-k$ per costruzione

$\dim W^\perp \leq n-k$ perché $W \cap W^\perp = \{0\} \Rightarrow$

$$X = \mathcal{L}(e) = W^\perp$$

□



$$\hookrightarrow \mathcal{L}(e') \subseteq B'_W{}^\perp \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dim B'_W{}^\perp \geq n - k$$

□