

## Diagonalizzazione di Matrici

$$A \in \mathbb{K}^{n,n}$$

$$f_A: \begin{cases} \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x \longrightarrow Ax \end{cases}$$

$$\text{Spec}(A) = \{ \lambda \mid \det(A - \lambda I) = 0 \}.$$

↑ insieme degli autovalori di A

$$X: AX = \lambda X \quad \text{con } X \neq 0 \quad \text{autovettori}$$

$$V_\lambda = \{ X \mid (A - \lambda I)X = 0 \} \quad \text{autospazio di autovettore } \lambda$$

A matrice.

autovettore di A  $\rightarrow$  radice di equazione caratteristica  
 $\det(A - \lambda I) = 0$

multiplicità algebrica di un autovettore  $\lambda$

il numero di volte che  $\lambda$  è radice dell'eq. caratteristica.

$$m_a(\lambda)$$

$$(x - \lambda)^{m_a(\lambda)} \mid \det(A - xI) \quad \swarrow \text{divide}$$

$$m_a (x - \lambda)^{m_a(\lambda)+1} \nmid \det(A - xI)$$

$\nwarrow$  non divide

OSS

$$1 \leq m_a(\lambda) \leq n$$

$$\text{in quanto } p_A(x) = \det(A - xI)$$

ha grado n.

multiplicità geometrica  $m_g(\lambda)$  di  $\lambda$

$$= \dim V_\lambda = \text{null}(A - \lambda I) = n - \text{rk}(A - \lambda I)$$

oss  $1 \leq m_g(\lambda) \leq n$

perché se  $\lambda$  è autovalore  $\text{rk}(A - \lambda I) < n$

$\Rightarrow m_g(\lambda) \geq 1$ ; d'altro canto  $V_\lambda \subseteq \mathbb{K}^n \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim V_\lambda \leq n.$

DIMOSTREMO CHE IN REALTÀ

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \leq n$$

$\lambda$  è un autovalore regolare se

$$m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$$

oss  $\sum_{\lambda \in \text{Spec}(A)} m_a(\lambda) \leq n$  e quindi anche

$$\sum m_g(\lambda) \leq \sum m_a(\lambda) \leq n$$

||

$$\sum_{\lambda \in \text{Spec } A} \dim V_\lambda$$

Vedremo che tutti gli autospazi sono in somma diretta e  $V = \mathbb{K}^n$  ammette una base di autovettori  $\Leftrightarrow \sum m_g(\lambda) = n$

Def: Due matrici  $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$  sono simili se  $\exists P \in GL(n, \mathbb{K})$  (matrice  $n \times n$  invertibile) tale che  $AP = PB$

(o equivalentemente  $B = P^{-1}AP$ )

Def Una matrice  $A$  è detta diagonalizzabile se essa è simile ad una matrice diagonale.

oss 1) La relazione di similitudine fra matrici è una relazione di equivalenza.

$$A \sim B \Rightarrow \exists P \underset{\text{invert.}}{P}: B = P^{-1}AP \Rightarrow A = PBP^{-1} = \\ = Q^{-1}BQ \text{ con } Q = P^{-1} \Rightarrow B \sim A$$

$$A \sim A \text{ infatti } A = I^{-1}AI$$

$$A \sim B, B \sim C \Rightarrow \exists P, Q \text{ invertibili:}$$

$$B = P^{-1}AP \quad C = Q^{-1}BQ \\ \Rightarrow C = Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = \\ = (PQ)^{-1}A(PQ) \Rightarrow A \sim C$$

2) Due matrici simili hanno il medesimo polinomio caratteristico.  $\Rightarrow$  esse hanno lo stesso determinante e gli stessi autovalori.

$$A \sim B \Rightarrow \exists P \text{ con } \det(P) \neq 0 \text{ tale che} \\ B = P^{-1}AP \Rightarrow$$

$$P_B(x) = \det(B - xI) = \det(P^{-1}AP - xI) =$$

$$= \det(P^{-1} A P - x P^{-1} I P) =$$

$$= \det(P^{-1}) \det(A - x I) \det(P) =$$

$$= \det(P)^{-1} \det(A - x I) \det(P) =$$

$$= \det(A - x I) = p_A(x)$$

$$\det(B) = p_B(0) = p_A(0) = \det(A)$$

3) Una matrice  $A$  è diagonalizzabile  
 $\Leftrightarrow \mathbb{K}^n$  ammette una base di autovettori  
 per  $A$ .

DIM Sia  $D$  una matrice diagonale simile ad

$A \Rightarrow \exists P \in GL(n, \mathbb{K})$  tale che

$$AP = PD$$

$$A(P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n) = (P_1 \ \dots \ P_n) \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (AP_1 \ AP_2 \ \dots \ AP_n) = (d_1 P_1 \ d_2 P_2 \ \dots \ d_n P_n)$$

ovvero  $\boxed{A P_i = d_i P_i}$

ne segue che le colonne di  $P$  sono  
 tutti autovettori di  $A$  e poiché tali colonne

sono linearmente indipendenti ( $\det(P) \neq 0$ )  
abbiamo una base di autovettori di  $\mathbb{K}^n$   
(data proprio da queste  $n$  colonne).

Viceversa: supponiamo  $(P_1 \text{ --- } P_n)$   
base di  $\mathbb{K}^n$  formata da autovettori di  $A$   
di autovalori  $d_1 \text{ --- } d_n \Rightarrow$

$$A(P_1 \text{ --- } P_n) = (AP_1 \text{ --- } AP_n) = \\ = (d_1 P_1 \text{ --- } d_n P_n) = (P_1 \text{ --- } P_n) \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A$  è simile ad una matrice diagonale.  $\square$

La matrice  $P = (P_1 \text{ --- } P_n)$  che  
compare sopra è detta matrice diagonalizzante  
per  $A$

N.B.  $\det(P) \neq 0$

Per vedere se  $A$  è diagonalizzabile bisogna  
studiare gli autovalori di  $A$

$\downarrow$   
vogliamo che la somma di tutti gli  
autospazi di  $A$  abbia dimensione  $n$

Teorema: Sia  $\lambda \in \text{Spec}(A) \Rightarrow m_g(\lambda) \leq m_e(\lambda)$

Dim

Supponiamo  $g = m_g(\lambda)$  e facciamo vedere che  $\lambda$  deve essere radice dell'eq. caratteristica almeno  $g$  volte.  $g \geq 1$

Sia  $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_g)$  una base di  $V_\lambda$  possiamo completare  $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_g)$  a base di  $K^n$  aggiungendo  $n-g$  vettori

$$(\bar{u}_1 \dots \bar{u}_{n-g})$$

poniamo  $P = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_g \quad \bar{u}_1 \dots \bar{u}_{n-g})$   
 $\uparrow$   
 colonne = base di  $K^n$   
 $\Rightarrow \det(P) \neq 0$

$$AP = (A\bar{v}_1 \dots A\bar{v}_g \quad A\bar{u}_1 \dots A\bar{u}_{n-g}) =$$

$$= (\lambda \bar{v}_1 \dots \lambda \bar{v}_g \quad A\bar{u}_1 \dots A\bar{u}_{n-g}) =$$

$$P \left( \begin{array}{c|c} \lambda & X \\ \hline 0 & Y \end{array} \right)$$

con  $P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = (A\bar{u}_1 \dots A\bar{u}_{n-g})$

$$P^{-1}AP = \left( \begin{array}{c|c} \lambda & X \\ \hline 0 & Y \end{array} \right)$$

blocco  $g \times g$        $\parallel$   $C$       *matrice similitudine*

$A$  e  $C$  sono simili  $\Rightarrow$  hanno lo stesso polinomio caratteristico.

$$p_c(x) = \det(C - xI) = \begin{vmatrix} \lambda - x & X \\ \hline 0 & Y - xI \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - x)^g \cdot \det(Y - xI)$$

$$\Rightarrow m_a(\lambda) \geq g = m_g(\lambda) \quad \square$$

Conseguenza:  $\sum_{\lambda \in \text{Spec}(A)} m_g(\lambda) \leq n$

Se vogliamo sperare di avere una base di sottovettori ci serve  $\sum m_g(\lambda) = n$

$$|K^n| = \sum_{\lambda \in \text{Spec}(A)} \dim V_\lambda$$

re  $\dim V_\lambda \leq n$   
 $\lambda \in \text{Spec } A$   
 non è possibile.

Teorema: Gli autospazi di una matrice  $A \in \mathbb{K}^{n,n}$  sono sempre in somma diretta.

N.B.: Due spazi  $U, W$  sono in somma diretta se  $\forall \bar{v} \in U+W$  si scrive in modo unico come  $\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$  si dimostra  
 $U \oplus W \Leftrightarrow U \cap W = \{0\}$ .

$t$  spazi  $U_1, \dots, U_t$  sono in somma diretta  $U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_t$

se ogni vettore  $\bar{v} \in \bigoplus U_i$  si scrive in modo unico come somma  $\bar{v} = \bar{u}_1 + \dots + \bar{u}_t$  con  $\bar{u}_i \in U_i$

N.B. questo non è equivalente a dire  
 $U_i \cap U_j = \{0\} \quad \forall i, j$

È equivalente a dire che

$$\forall i, \quad \bigoplus_{j < i} U_j \cap U_i = \{0\}.$$

in  $\mathbb{R}^2$   
 $L((1,0)) \mid L((0,1))$   
 $L((1,1))$



DIM Supponiamo  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  con  $\lambda_1, \lambda_2 \in \text{Spec}(A)$

mostriamo  $V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}$  ovvero  $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0\}$ .

$$V_{\lambda_1} = \{X \mid AX = \lambda_1 X\}$$

$$V_{\lambda_2} = \{X \mid AX = \lambda_2 X\}$$

$$Y \in V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2}$$

$$AY = \lambda_1 Y = \lambda_2 Y$$

$$\text{quindi } (\lambda_1 - \lambda_2)Y = 0 \Rightarrow Y = 0$$

Si ragiona per induzione sul numero di autospazi.

IPOTESI: ogni somma di  $t-1$  autospazi è diretta

$T_3$ : ogni somma di  $t$  autospazi è diretta.

$\rightarrow$  Siano  $V_{\lambda_1} \dots V_{\lambda_t}$   $t$  autospazi differenti

$$\text{e sia } X \in V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = X_1 + X_2 + \dots + X_t \text{ con } X_i \in V_{\lambda_i}$$

$$= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_t \quad Y_i \in V_{\lambda_i}$$

supponiamo  $X$  si scriva in 2 modi diversi

$$\begin{aligned} AX &= A(X_1 + \dots + X_t) = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_t X_t \\ &= A(Y_1 + \dots + Y_t) = \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \dots + \lambda_t Y_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 X &= \lambda_1 X_1 + \lambda_1 X_2 + \dots + \lambda_1 X_t \\ &= \lambda_1 y_1 + \lambda_1 y_2 + \dots + \lambda_1 y_t\end{aligned}$$

Considero  $AX - \lambda_1 X =$

$$= (\cancel{\lambda_1 - \lambda_1}) X_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) X_2 + \dots + (\lambda_t - \lambda_1) X_t$$

$$= (\cancel{\lambda_1 - \lambda_1}) y_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) y_2 + \dots + (\lambda_t - \lambda_1) y_t$$

$$(\lambda_2 - \lambda_1) X_2 + \dots + (\lambda_t - \lambda_1) X_t =$$

$$= (\lambda_2 - \lambda_1) y_2 + \dots + (\lambda_t - \lambda_1) y_t \in \underbrace{V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t}}$$

$$\begin{cases} \downarrow \\ (\lambda_2 - \lambda_1) X_2 = (\lambda_2 - \lambda_1) y_2 \\ | \\ (\lambda_t - \lambda_1) X_t = (\lambda_t - \lambda_1) y_t \end{cases}$$

↓  
somma di  $t-1$   
auto spazi  $\Rightarrow$  somma  
diretta

e poiché  $\lambda_1 \neq \lambda_i \quad i \neq 1$  ne segue

$$\forall i > 1 \quad y_i = X_i$$

$$X = \boxed{X_1 + \sum_{i>1} X_i} = y_1 + \sum_{i>1} y_i =$$

$$= \boxed{y_1 + \sum_{i>1} X_i}$$

$\Rightarrow X_1 = Y_1$  e quindi  $X$  si deve scrivere  
 in modo unico come somma  
 di vettori  $X_1 + \dots + X_r$   
 con  $X_i \in V_{\lambda_i} \Rightarrow V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r}$   
 è diretta.

Conseguenza.

- 1)  $\dim \left( \bigoplus_i V_{\lambda_i} \right) = \sum \dim(V_{\lambda_i}) = \sum m_g(\lambda_i)$
- 2) Se  $\sum m_g(\lambda_i) = n \Leftrightarrow$  la matrice  $A$   
 è diagonalizzabile

$A \rightarrow$  è diagonalizzabile?

1) calcolare  $\text{Spec}(A)$  e  $m_a(\lambda_i)$

se  $\sum m_a(\lambda_i) < n \Rightarrow A$  non è diag.  
 perché anche  
 $\sum m_g(\lambda_i) < n$

2) calcolare  $m_g(\lambda_i)$  per  $\lambda_i \in \text{Spec}(A)$

se ogni autovalore è regolare

$\Rightarrow \sum m_g(\lambda_i) = n$  e la matrice  
 è diagonalizzabile ( $\exists$  una base di  
 autovettori).

la matrice diagonale simile ad  $A$   
possiamo già scriverla  $\rightarrow$  è una  
matrice diagonale che ha sulla  
diag. principale gli autovalori di  $A$   
con le debite molteplicità

Sapete  $A \in \mathbb{R}^{3,3}$   $\text{Spec}(A) = \{1, 2, 3\}$

Si perché  $\sum m_a(\lambda_i) = 3$

$$1 \leq m_g(\lambda_i) \leq m_a(\lambda_i) = 1$$

$$\sum m_g(\lambda_i) = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

oss: Se  $A \in \mathbb{K}^{n,n}$  ammette  $n$  autovalori distinti

$\Rightarrow A$  è sicuramente diagonalizzabile

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \quad (x-1)(x-7)(x-4)(x-11)$$

è diagonalizzabile?

3) Si calcolano gli autospazi, e la matrice  
diagonalizzabile

N.B. NON CALCOLATE LA MATRICE DIAGONALE USANDO LA DIAGONALIZZANTE!

$$P^{-1}AP = D$$

N.B.B. Gli autovalori in  $D$  e gli autovettori in  $P$  devono essere nel medesimo ordine.

$$P^{-1}AP = D$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1 \quad V_1 = \mathcal{L} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$
$$\lambda = 2$$

$$\left[ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] X = \underline{0}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \mathcal{L} \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$D = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 \\ 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = D$$

N.B. NON SCRIVERE

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$