

Sistemi lineari

$$AX = B$$

è compatibile $\Leftrightarrow \text{rk}(A) = \text{rk}(A|B)$

le soluzioni sono del tipo

$$X = X_0 + Z$$

con $Z \in \text{Ker}(A)$

Si dice che si hanno ∞^t soluzioni se
 $t = \dim \text{Ker}(A)$

t è il numero di parametri da cui dipendono
le soluzioni

Teorema (nullità + rango) $A \in K^{m,n}$

$$\text{null}(A) := \dim \text{Ker}(A)$$

$$\rightarrow \boxed{\text{null}(A) + \text{rk}(A) = n}$$

$$\text{null}(A) = n - \text{rk}(A) \quad \text{"ci sono } \infty^{n-k} \text{ soluzioni"}$$

DIM

$$f_A: \begin{cases} K^n \longrightarrow K^m \\ x \longrightarrow Ax \end{cases}$$

$$\text{Ker } f_A = \text{Ker } A \quad \dim \text{Ker}(f_A) = \text{null}(A) = k$$

- Se $k=0$ non c'è nulla da dimostrare perché in questo caso $\text{rk}(A) = n$ perché f_A manda una base di K^n in una base di $\text{Im } f_A$ e quindi il rango è n

$$n = n + 0$$

- Se $k \neq 0 \Rightarrow$ Sia $(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$ una base di $\text{Ker } f_A$
e completiamo questa sequenza a base di K^n

aggiungendo $n-k$ vettori

$$\beta = (\underbrace{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k}_{\text{BASE di } \ker f_A}, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{n-k})$$

oss: $f_A(\beta) = (\underbrace{f_A(\bar{w}_1), \dots, f_A(\bar{w}_k)}_{\mathbf{0}}, f_A(\bar{u}_1), \dots, f_A(\bar{u}_{n-k}))$
è un insieme di generatori per $\text{Im } f_A$

ma in particolare $(f_A(\bar{u}_1), \dots, f_A(\bar{u}_{n-k}))$
generano da soli $\text{Im } f_A$

$n-k$ vettori che generano $\text{Im } f_A$

Per avere la veri dobbiamo far vedere che questi
vettori sono linearmente indipendenti $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \dim \text{Im}(f_A) = n-k = \text{rk}(A)$

(perché $\text{Im } f_A$ è il sottospazio generato dalle colonne di A)

Supponiamo

$$\beta_1 f_A(\bar{u}_1) + \dots + \beta_{n-k} f_A(\bar{u}_{n-k}) = \mathbf{0}$$

$$f_A(\beta_1 \bar{u}_1 + \dots + \beta_{n-k} \bar{u}_{n-k}) = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \beta_1 \bar{u}_1 + \dots + \beta_{n-k} \bar{u}_{n-k} \in \ker f_A = L(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$$

$$\bar{z} = \beta_1 \bar{u}_1 + \dots + \beta_{n-k} \bar{u}_{n-k} = \gamma_1 \bar{w}_1 + \dots + \gamma_k \bar{w}_k$$

Se $\exists i$ tale che $\beta_i \neq 0 \Rightarrow \bar{z} \neq \mathbf{0}$ e si scrive in 2
modi differenti rispetto a β $\Rightarrow \bar{z} = \mathbf{0}$ e

$$\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_{n-k} = 0 \Rightarrow \text{i vettori}$$

$f_A(\bar{u}_1), \dots, f_A(\bar{u}_{n-k})$ sono una base di $\text{Im } f_A$

$$\Rightarrow \text{rk}(A) = \dim \text{Im } f_A = n - k \Rightarrow$$

$$\text{rk}(A) + \text{null}(A) = (n - k) + k = n \quad \square$$

Sistemi lineari

$$AX = B$$

1) è risolubile? $\rightarrow \text{R/C} \quad \text{rk}(A) = \text{rk}(A|B)$

2) Quante soluzioni quando è risolubile?

$$\infty^{n-k}$$

ove $n = \text{numero di incognite}$
 $k = \text{rk}(A) = \text{rk}(A|B)$.

3) Quali sono le soluzioni?

$$S = X_0 + \text{ker}(A)$$

$\nearrow$
 soluzione
 particolare

$\nwarrow$
 soluzioni di
 $AZ = \underline{0}$

4) come trovare le soluzioni.

$\rightarrow$ RIDUZIONE GAUSSIANA (programmando).

$\rightarrow$ SOSTITUZIONE / RIDUZIONE A SISTEMI DI CRAMER

es.: Vogliamo studiare un sistema lineare

$$\rightarrow \begin{array}{c} A \qquad B \\ \begin{array}{|ccccc|c} \hline 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -6 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

sistema di 5 eq.
 in 5 incognite.

$$\text{rk}(A) = \text{rk}(A|B) = 2$$

equivalente a

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

in questo ogni soluzione delle prime 2 eq. è anche soluzione di qualsiasi loro combinazione lineare.

→ nuovo sistema è detto sistema principale equivalente a quello di partenza e $\square$ è detto minore fondamentale.

Le equazioni che sono linearmente dipendenti dalle altre sono ridondanti e possono essere rimosse in quanto ogni rd. di un insieme di eq. è anche relazione di una combinazione lineare delle altre.

Adesso consideriamo le colonne intercettate dal minore fondamentale.

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ \left(\begin{array}{cc|ccc|c} 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

risolviamo il sistema prendendo come incognite quelle che corrispondono alle colonne intercettate dal minore fondamentale e come parametri le rimanenti

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_5 = 2 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 2 - 5x_3 - x_5 \\ x_2 = -x_3 - 2x_4 - x_5 \end{cases}$$

"sistema di Cramer in x_1, x_2 che dipende dai parametri x_3, x_4, x_5 "

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(2 - 5x_3 - x_5 - 3x_2) = \\ \quad = \left[2 - 5x_3 - x_5 - 3(-x_3 - 2x_4 - x_5) \right] \cdot \frac{1}{2} \\ x_2 = -x_3 - 2x_4 - x_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = x_5 \end{cases}$$

Si consideri un sistema lineare $AX=B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Trovare i vettori } B \text{ tali}$$

che il sistema sia compatibile.

$$AX=B \text{ compat} \Leftrightarrow B \in L_c(A)$$

$$B \in L \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

- Si scrivano tutti i sistemi lineari omogenei che ammettono (1200) e (0101) come soluzioni

oss 1 sono sistemi in 4 incognite.

oss 2 ogni eq. del sistema deve essere soddisfatta da (1200) e (0101) e deve essere omogenea

$$ax + by + cz + dt = 0$$

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b \cdot 2 = 0 \\ b \cdot 1 + d \cdot 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} a = -2b \\ d = -b \end{matrix}$$

le equazioni devono appartenere all'insieme

$$E = \{ -2b \cdot x + by + cz - b \cdot t = 0 \mid b, c \in \mathbb{K} \}$$

Qualunque sistema formato da equazioni che stiano in E ha le soluzioni richieste.

N.B E è uno spazio vettoriale di $\dim = 2$

$$E = \mathcal{L}((-2x + y - t = 0, z = 0))$$

$$E = \{ b(-2x + y - t = 0) + c(z = 0) \mid b, c \in \mathbb{K} \}$$

□

Autovettori ed autovalori.

$V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale di $\dim n$.

$f: V_n(\mathbb{K}) \rightarrow V_n(\mathbb{K})$ applicazione lineare

per quali $\bar{v} \in V_n(\mathbb{K})$ $f(\bar{v}) = \bar{v}$

sicuramente $f(\bar{0}) = \bar{0}$

Sia $B = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ una base fissata

$$\Rightarrow f(d_1 \bar{e}_1 + \dots + d_n \bar{e}_n) = \beta_1 \bar{e}_1 + \dots + \beta_n \bar{e}_n$$

$$\text{ovvero } \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \quad \text{con } A \in \mathbb{K}^{n,n}$$

ovvero le colonne di A sono le componenti dei vettori immagine di $\bar{e}_i$ (cioè $f(\bar{e}_i)$ rispetto a B).

cosa vuol dire $\bar{v} = d_1 \bar{e}_1 + \dots + d_n \bar{e}_n$ è fissato?

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

componenti di $f(\bar{v})$ componenti di $\bar{v}$

I vettori fissati sono quelli che hanno come componenti rispetto a B un vettore X tale che

$$\boxed{AX = X}$$

$$AX = I_n X$$

$$(A - I_n)X = \underline{0}$$

In particolare i vettori fissati da f sono quelli le cui componenti sono elementi di $\text{Ker}(A - I)$ (o, se volete sono gli elementi di $\text{Ker}(f - \text{id})$)

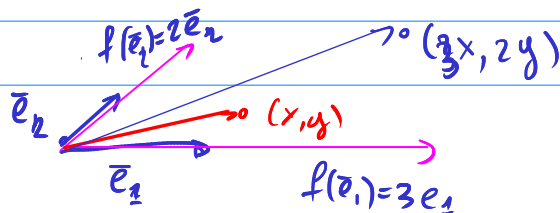
↑
applicazione
identica

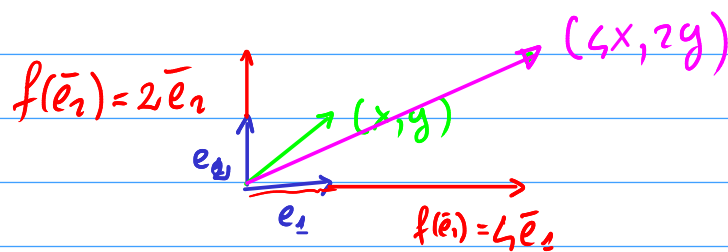
$$\begin{cases} \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ X \longrightarrow AX \end{cases}$$

In generale

Def Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. Si dice autovettore di A di autovalore λ un vettore $X \in \mathbb{K}^n$ tale che $\boxed{X \neq \underline{0}}$ e $\boxed{AX = \lambda X}$.

Fondamentalmente un autovettore è un vettore trasformato da A in un vettore che ha "la stessa direzione"





Supponiamo $B = (\bar{e}_1 \text{ --- } \bar{e}_n)$ base di autovettori per A di autovalori $(\lambda_1 \text{ --- } \lambda_n)$

$$\bar{v} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \text{---} + \alpha_n \bar{e}_n$$

$$\begin{aligned} A\bar{v} &= A(\alpha_1 \bar{e}_1 + \text{---} + \alpha_n \bar{e}_n) = \\ &= \alpha_1 A\bar{e}_1 + \text{---} + \alpha_n A\bar{e}_n = \\ &= \alpha_1 \lambda_1 \bar{e}_1 + \text{---} + \alpha_n \lambda_n \bar{e}_n \end{aligned}$$

in particolare $A \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \bar{e}_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Coprire quando ci sono autovettori e come trovarli.

X autovettore $\Leftrightarrow X \neq 0$ & $AX = \lambda X$ per qualche λ

$$AX = \lambda X \quad (*) \quad (A - \lambda I)X = 0 \quad \hookrightarrow \text{ sistema lineare}$$

Quando $(*)$ ha soluzione? Sempre ma noi vogliamo

$X \neq 0 \Rightarrow$ vogliamo che $(*)$ abbia almeno 2 soluzioni.

ma questo è possibile $\Leftrightarrow \text{rk}(A - \lambda I) < n$ ovvero

$\boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$ equazione caratteristica di A

Le radici dell'equazione caratteristica sono gli autovalori di A .

Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(x) = \det(A - xI)$$

L'insieme di tutti gli autovalori di A è detto spettro di A

$$\text{Spec}(A) = \{\lambda \mid \det(A - \lambda I) = 0\}$$

Dati gli autovalori di A si possono cercare gli autovettori corrispondenti in particolare

$$\text{se } \lambda \in \text{Spec}(A) \Rightarrow V_\lambda = \{X \mid (A - \lambda I)X = 0\} = \ker(A - \lambda I)$$

↓
autospazio di autovalore λ

= insieme di tutti gli autovettori di autovalore λ più il vettore nullo $\square$