

Determinante funzione calcolabile che consente di studiare le lineeare dipendenza/indipendenza.

I Teorema di Laplace

$$\det(I_n) = 1 \quad \left| \begin{array}{l} A \in K^{n,n} \\ \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{array} \right. \quad \det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} \Gamma_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$
$$\Gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

Proprietà essenziali:

- 1) $\det I_n = 1$
- 2) se si scambiano 2 colonne in una matrice il det. cambia di segno ($\rightarrow$ il det è alternante)
- 3) il det è multilineare nelle colonne di A

$$\begin{array}{c} c_1 \rightarrow \\ c_i \rightarrow \\ \vdots \\ c_n \rightarrow \end{array} \left| \begin{array}{c} \boxed{} \\ \boxed{} \\ \boxed{} \\ \boxed{} \end{array} \right| \rightarrow \det(c_1 \dots c_n)$$

Se fissate $(n-1)$ colonne la funzione è lineare nella colonna non fissata

$$\forall i \quad \det(c_1 \dots \alpha c_i + \beta c'_i \dots c_n) = \alpha \det(c_1 \dots c_i \dots c_n) + \beta \det(c_1 \dots c'_i \dots c_n)$$

Teorema $\exists!$ funzione $\det: K^{n,n} \rightarrow K$ che soddisfa le 3 proprietà.

Teorema $\det(A) = \det({}^t A) \rightarrow$ tutto quello che si dice delle colonne di A si può dire anche delle righe.

$tA = "A \text{ trasposta}":$ matrice ottenuta scambiando le righe e le colonne di A

oss dalle proprietà date segue.

1) che se in A ci sono 2 righe (colonne) uguali

$$\Rightarrow \det A = -\det A = 0$$

2) se in A c'è una colonna/ di 0 $\Rightarrow \det A = 0$

3) se si ^{riga.} _{colonna} di A si somma una c. lineare delle rimanenti $\Rightarrow \det A$ non cambia.

$$A = (C_1 \ C_2 \ \dots \ C_n)$$

$$A' = (C_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i C_i \ C_2 \ \dots \ C_n)$$

$$\det A' = \det (C_1 \ C_2 \ \dots \ C_n) + \sum_{i=2}^n \alpha_i (\cancel{C_1} \ C_2 \ \dots \ C_n) = \\ = \det (C_1 \ C_2 \ \dots \ C_n)$$

• Se le colonne (righe) di A sono un sistema legato

$$\Rightarrow \det A = 0$$

Dim Se le colonne sono legate $\exists C_i = \sum_{j \neq i} \beta_j C_j$

$$\Rightarrow \det A = \det (C_1 \ \dots \ C_i - \sum_{j \neq i} \beta_j C_j \ \dots \ C_n) \\ = \det (C_1 \ \dots \ \underline{0} \ \dots \ C_n) = 0$$

Applicazione: $(1 \ 3 \ 5) \ (0 \ 2 \ 1) \ (1 \ 0 \ 0)$ sono una base di $\mathbb{R}^3$?

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 10 = -7 \neq 0 \Rightarrow \text{sì}$$

Facciamo vedere come si può ricondurre il calcolo di $\det(A)$ al $\det(I_n)$ usando le proprietà delle

$$|A| = \det(A)$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \\ &= 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 18 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

N.B. queste manipolazioni garantiscono 1) l'unicità del det.
2) che det si può calcolare in $O(n)$ operazioni, cioè con un multiplo^{costante} di operazioni del numero di righe della matrice.

$\rightarrow$ con Laplace $O(n!)$

con Gauss $O(n)$

Abbiamo dimostrato che se le righe di A sono lin. dip. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \det A = 0$

Valo anche il viceversa, cioè $\det A = 0 \Rightarrow$ le righe sono dipendenti.

Supponiamo $\det A = 0 \Rightarrow$ con le operazioni elementari

si arriva ad una matrice con una riga di 0

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

(perché altrimenti si può sempre arrivare alla matrice identità) con $\det$ moltiplicato per un coeff. non nullo.

$\rightarrow$ MA SE C'È UNA RIGA DI 0 $\Rightarrow$ vuol dire che almeno una riga della matrice iniziale era c. lineare delle rimanenti $\Rightarrow$ le righe iniziali erano un sistema legato.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

N.B. questo significa che

$$(145) - (123) - 1(011) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (145) = (123) + 1(011) \Rightarrow \text{legati!}$$

per sapere se n vettori di $\mathbb{K}^n$ sono una base

$\rightarrow$ li si mette a matrice e si calcola il $\det$.

$\det = 0 \Rightarrow$ legati

$\det \neq 0 \Rightarrow$ BASE

II Teorema di Laplace.

Sia $A \in K^{n \times n} \quad \forall i, j \text{ con } i \neq j$

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \Gamma_{jk} = 0$$

In altre parole

$$\sum a_{ik} \Gamma_{jk} = \sum (-1)^{j+k} \underbrace{a_{ik}}_{\uparrow} \underbrace{\det(A_{jk})}_{\det A \text{ se } i=j} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \det A & \text{se } i=j \end{cases}$$

DIM: si sviluppa $\sum a_{ik} \Gamma_{jk}$ e si vede che

coincide col det di una matrice con 2 righe
uguali $\Rightarrow$ è 0 □