

Ultima lezione

$f: V(K) \rightarrow W(K)$ lineare.

$B = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ base di $V(K)$

$B' = (\bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_m)$ base di $W(K)$

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{e}_i\right) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i f(\bar{e}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\sum_{j=1}^m a_{ji} \bar{e}'_j\right) \end{aligned}$$

f è caratterizzata dai valori a_{ji}

possiamo costruire una matrice $m \times n$ che contiene gli a_{ji}

$$A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\tilde{v}$ = vettore colonna delle componenti di $\bar{v} \in V(K)$

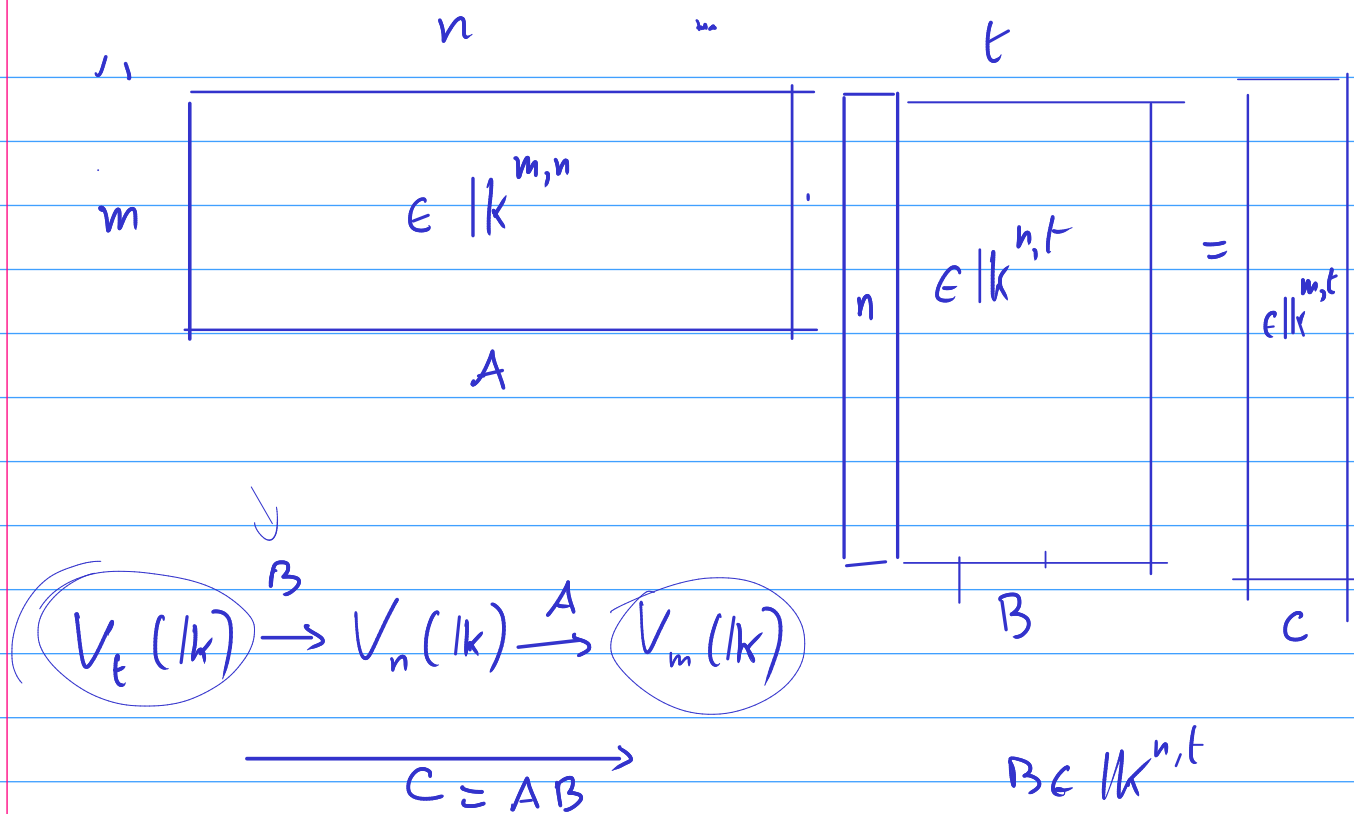
rispetto a B

$$A_f \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \vdots \\ \tilde{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$$

vettore colonna delle componenti di $f(\bar{v})$ rispetto a B' .

$$A(2B + \gamma C) = 2AB + \gamma AC$$

oss: Il prodotto di matrici corrisponde alla composizione di funzioni lineari.



CONSEGUENZA $\rightarrow$ il prodotto è associativo

CASO PARTICOLARE $V_n(K) \xrightarrow{A} V_n(K)$

$$A \in K^{n,n}$$

|| se A è anche invertibile $\Rightarrow A$ rappresenta una
 || biiezione $V_n(K) \rightarrow V_n(K)$ (isomorfismo).

Teorema: Sia $f: V(K) \rightarrow W(K)$ una applicazione
 lineare $\Rightarrow f$ manda sequenze libere in
 sequenze libere $\Leftrightarrow \ker f = \{0\}$.
 (cioè f è iniettivo).

DIM: Se $\ker f \neq \{0\} \Rightarrow \exists \bar{v} \neq 0$ tale che $f(\bar{v}) = 0$

ma sia $B = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ una base di $V(K) \Rightarrow \bar{v} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n$

con almeno un $\alpha_i \neq 0 \Rightarrow f(\bar{v}) = \alpha_1 f(\bar{e}_1) + \dots + \alpha_n f(\bar{e}_n) = 0$
 con un $\alpha_i \neq 0 \Rightarrow$

la sequenza $(f(\bar{e}_1), \dots, f(\bar{e}_n))$ NON È LIBERA

Viceversa mostriamo che f manda sequenze libere
in sequenze libere $\Rightarrow$

Sia $S = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ una sequenza libera di vettori
e $B = S \cup B'$ una base di $V(K)$ [completo della base].

$$\Rightarrow \forall \bar{v} \in V(K) \quad f(\bar{v}) = f(\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n + \beta_{n+1} \bar{e}_{n+1} + \dots + \alpha_m \bar{e}_m)$$

$$= \alpha_1 f(\bar{e}_1) + \alpha_2 f(\bar{e}_2) + \dots + \alpha_n f(\bar{e}_n) = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \text{ perché } (f(\bar{e}_1), \dots, f(\bar{e}_n)) \text{ libera}$$

$$\Rightarrow f(\bar{v}) = \underline{0} \Leftrightarrow \bar{v} = \underline{0}$$

□

Intersezione e somma di spazi vettoriali.

$$W \subseteq V(K)$$

Teorema: Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale $U, W \subseteq V$

$\Rightarrow U \cap W$ è un sottospazio

DIM facile

$$\forall \alpha, \beta \in K, \bar{v}, \bar{w} \in U \cap W: \alpha \bar{v} + \beta \bar{w} \in U \cap W$$

$$\bar{v}, \bar{w} \in U \cap W \Rightarrow \bar{v}, \bar{w} \in U \Rightarrow \forall \alpha, \beta \in K: \alpha \bar{v} + \beta \bar{w} \in U$$

$$\bar{v}, \bar{w} \in W \Rightarrow \forall \alpha, \beta \in K: \alpha \bar{v} + \beta \bar{w} \in W$$

$$\Rightarrow \alpha \bar{v} + \beta \bar{w} \in U \cap W$$

□

oss: $W \subseteq V \Rightarrow \dim(W) \leq \dim(V)$ e $\dim W = \dim V \Leftrightarrow W = V$

Se $W = \{0\} \Rightarrow \dim W = 0 \leq \dim(V)$

Se no sia B una base di $W \Rightarrow$ gli elementi di B sono una sequenza libera di vettori di V
 $\Rightarrow |B| \leq \dim V$ per Steinitz.

Se $|B| = \dim V \Rightarrow B$ è di generatori per $V \Rightarrow V = W$ $\square$

N.B In particolare $\dim(U \cap W) \leq \min(\dim U, \dim W)$

Dati $U, W \subseteq V$ con $\dim U = 7$ $\dim W = 8$
 $\dim V = 11$

Trovare dimensione minima e max di $U \cap W$

$$5 \leq \dim(U \cap W) \leq 7$$

oss: | Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale di $\dim = n \Rightarrow \forall 0 \leq i \leq n \exists W \subseteq V_n(\mathbb{K})$ con $\dim W = i$

Sia $B = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ base di $V_n(\mathbb{K})$

e poniamo $W_i = \mathcal{L}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_i) \Rightarrow \dim W_i = i$

in $\mathbb{R}^3$ $U = \mathcal{L}((1, 0, 1), (0, 1, 0))$

$W = \mathcal{L}((1, 0, 0), (1, 2, 1))$

$U \cap W$

$$\alpha(1, 0, 1) + \beta(0, 1, 0) = a(1, 0, 0) + b(1, 2, 1)$$

$$(\alpha, \beta, \alpha) = (a+b, 2b, b)$$

$$\begin{cases} \alpha = b \\ 2b = \beta \\ \alpha = a + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=b \\ \beta=2b \\ a+b=b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=b \\ \beta=2b \end{cases}$$

$$U \cap W = \{ (b \ 2b \ b) \mid b \in \mathbb{R} \}$$

$$U = \{ (x \ y \ z) \mid x+2y+z=0 \}$$

$$W = \{ (x, y, z) \mid x-y+z=0 \}$$

$$U \cap W = \{ (x \ y \ z) \mid x+2y+z=0, x-y+z=0 \}$$

oss In $\mathbb{R}^2 = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$

$$U = L((1 \ 0)) \quad W = L((0 \ 1))$$

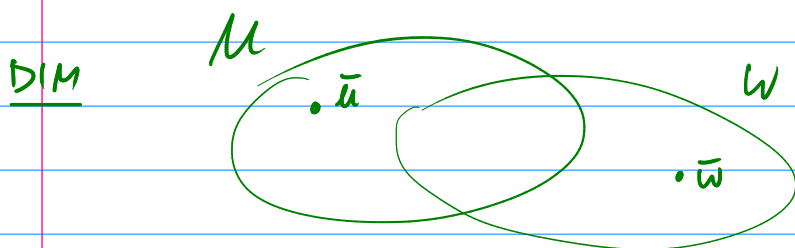
$$U \cup W = \{ (\alpha, \beta) \mid \alpha\beta=0 \}$$

ma $(1 \ 0) \in U \cup W \quad (0 \ 1) \in U \cup W$
 $(1 \ 1) = (1 \ 0) + (0 \ 1) \notin U \cup W.$

In generale l'unione di sottospazi non è un sottospazio.

proposizione: Siano $U, W \subseteq V(K) \Rightarrow$

$$U \cup W \subseteq V(K) \text{ se e solo se se } U \subseteq W \text{ o } W \subseteq U,$$



Supponiamo che
 $U \not\subseteq W \text{ e } W \not\subseteq U$

Allora $\exists \bar{u} \in U \setminus W \text{ e } \bar{w} \in W \setminus U \quad \bar{u}, \bar{w} \in U \cup W$

consideriamo $\bar{u} + \bar{w}$; se $U \cup W$ fosse sottospazio

$$\Rightarrow \bar{u} + \bar{w} \in U \cup W \Rightarrow \bar{u} + \bar{w} \in U \Rightarrow (\bar{u} + \bar{w}) - \bar{u} = \bar{w} \in U \quad \text{ug}$$

oppure

$$\bar{u} + \bar{w} \in W \Rightarrow (\bar{u} + \bar{w}) - \bar{w} = \bar{u} \in W \quad \text{ug}$$

□

COSA FARE? Vogliamo definire un'operazione
che dati U, W ci fornisca il
più piccolo sottospazio che contenga
entrambi $U + W = L(U \cup W)$

Def: Siano $U, W \subseteq V(K)$; si dice somma di
 U e W l'insieme

$$U + W = \{ \bar{u} + \bar{w} \mid \bar{u} \in U, \bar{w} \in W \}$$

Teorema: $U + W = L(U \cup W)$ cioè $U + W$
è il più piccolo sottospazio di V che
contiene U e W .

DIM

$$U = \{ \bar{u} + \underline{0} \mid \bar{u} \in U \} \subseteq U + W$$

$$W = \{ \underline{0} + \bar{w} \mid \bar{w} \in W \} \subseteq U + W$$

Siano $\bar{u} + \bar{w}$ e $\bar{u}' + \bar{w}' \in U + W$, $\alpha, \beta \in K$

$$\Rightarrow \alpha(\bar{u} + \bar{w}) + \beta(\bar{u}' + \bar{w}') = \underbrace{(\alpha\bar{u} + \beta\bar{u}')}_{\in U} + \underbrace{(\alpha\bar{w} + \beta\bar{w}')}_{\in W} \in$$

$$\in U + W \quad \Rightarrow \quad U + W \subseteq V(K).$$

osserviamo che ogni sottospazio vettoriale che
contiene sia U che W deve anche

contenere $\bar{u} + \bar{w} \quad \forall \bar{u} \in U, \bar{w} \in W \Rightarrow$

$U+W = L(U \cup W)$ è il più piccolo sottospazio che li contiene entrambi.

$$U, W \leq U+W \leq V_n(\mathbb{K})$$

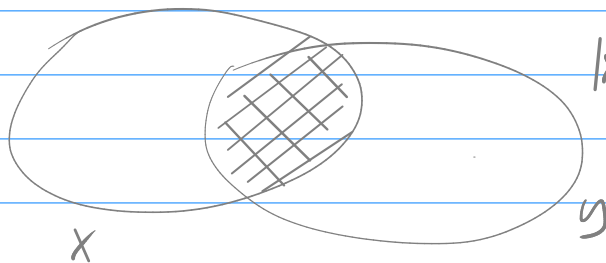
$$\max(\dim U, \dim W) \leq \dim(U+W) \leq \dim V_n(\mathbb{K})$$

Teorema (formula di Grassman)

$$\rightarrow \dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

Siano X, Y due insiemi finiti

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$$

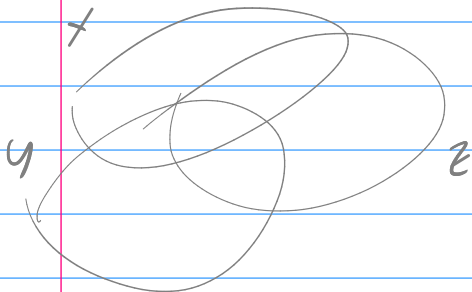


$$|X \cup Y| = |X - Y| + |X \cap Y| + |Y - X|$$

//

$$|X| - |X \cap Y| + |X \cap Y| + |Y| - |X \cap Y|$$

$$= |X| + |Y| - |X \cap Y|$$



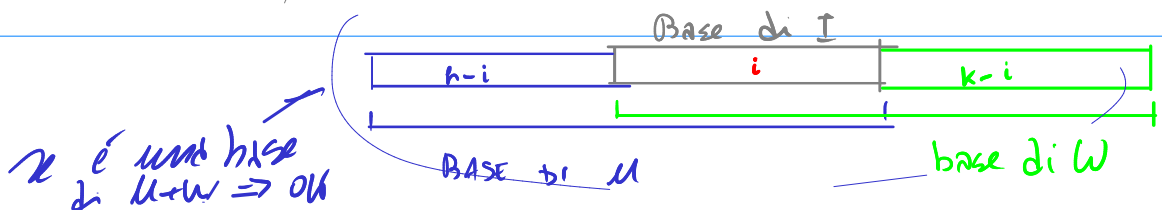
$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$$

$$U, W \leq V(\mathbb{K})$$

$$I = U \cap W$$

$$\dim U = h$$

$$\dim W = k$$



l'unione di una base di U e una base di W
generano $U+W$

$$h-i+i+k-i = h+k-i$$

$$\dim U + \dim W - \dim I$$

$$U+W = \mathcal{L}(U \cup W) = \mathcal{L}(\mathcal{L}(B_U) \cup \mathcal{L}(B_W)) = \\ = \mathcal{L}(B_U \cup B_W)$$

Se $I = \{0\} \Rightarrow$ la formula di Grassmann dice

$$\underline{\dim(U+W) = \dim U + \dim W}$$

Def: Siano $U, W \subseteq V(K)$. Si dice che

la somma $U+W$ è diretta e si scrive

$$U \oplus W$$

se ogni elemento di $U+W$ si scrive
in modo unico come somma di un elemento

$$\bar{u} \in U \text{ e } \bar{w} \in W;$$

$$\forall \bar{x} \in U+W \exists! \bar{u} \in U \bar{w} \in W: \bar{x} = \bar{u} + \bar{w} \quad \perp$$

Teorema: $U \oplus W \Leftrightarrow U \cap W = \{0\}$.

Dim: Supponiamo $x \in U \cap W$ e $U \oplus W$ diretta.

$$\text{prendiamo } \bar{x} = \bar{u} + \bar{w} \text{ con } \bar{u} \in U, \bar{w} \in W$$

$$\Rightarrow \bar{x} = (\bar{u} + \bar{x}) + (\bar{w} - \bar{x}), \text{ per ipotesi}$$

la somma è diretta $\Rightarrow$

$$\bar{u} + \bar{x} = \bar{u} \quad \& \quad \bar{w} - \bar{x} = \bar{w} \Rightarrow \bar{x} = \underline{0}$$

$$U \oplus W \Rightarrow U \cap W = \{\underline{0}\}$$

viceversa $U \cap W = \{\underline{0}\}$ e ne

$$\Delta = \bar{u} + \bar{w} = \bar{u}' + \bar{w}'$$

con $\bar{u}, \bar{u}' \in U$ $\bar{w}, \bar{w}' \in W$

$\bar{u} \neq \bar{u}'$ oppure $\bar{w} \neq \bar{w}'$

$$\bar{u} + \bar{w} = \bar{u}' + \bar{w}' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{\in U}{\bar{u} - \bar{u}'} = \underset{\in W}{\bar{w}' - \bar{w}} \Rightarrow \bar{u} - \bar{u}' \in U \cap W = \{\underline{0}\}$$

$$\Rightarrow \bar{u} = \bar{u}' \text{ e } \bar{w} = \bar{w}'$$

$$U \cap W = \{\underline{0}\} \Rightarrow U \oplus W$$

□

Conseguenza: siano $U \oplus W$ con $U, W \subseteq V(K)$.

e siano B_U una base di U e B_W una base di $W \Rightarrow$

$$B_U \cup B_W \text{ è}$$

una base di $U \oplus W$.

In particolare $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$

DIM 1) $B_U \cup B_W$ è sistema di generatori.

$$2) B_U = (\bar{e}_1 \text{ --- } \bar{e}_m) \quad B_W = (\bar{f}_1 \text{ --- } \bar{f}_n)$$

poiché la somma è diretta $\underline{0}$ si scrive unicamente

come $\underline{0} = \underset{\in U}{\underline{0}} + \underset{\in W}{\underline{0}}$

ma $\underline{v} \in U$ si scrive rispetto B_U in modo unico
come $0 \cdot \bar{e}_1 + \dots + 0 \cdot \bar{e}_m$

e $\underline{v} \in W$ si scrive in modo unico rispetto B_W
come $0 \cdot \bar{f}_1 + \dots + 0 \cdot \bar{f}_m$

$$\Rightarrow \underline{v} = (0 \cdot \bar{e}_1 + \dots + 0 \cdot \bar{e}_m) + (0 \cdot \bar{f}_1 + \dots + 0 \cdot \bar{f}_m) \quad \square$$

$\Rightarrow B_U \cup B_W$ base.