

Sequenza libera: $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ tali che

$$\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

Seq. Legata $\rightarrow \exists$ almeno una c. lineare

$$\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n = 0 \text{ con un } \alpha_i \neq 0$$

Teorema: Una sequenza è legata $\Leftrightarrow$ almeno uno dei suoi vettori è comb. lineare dei rimanenti

DIM $(\Rightarrow)$ Supponiamo $\alpha_i \neq 0$ $\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_{i-1} \bar{v}_{i-1} + \alpha_i \bar{v}_i + \dots + \alpha_n \bar{v}_n = 0$

$$\alpha_i \bar{v}_i = - \sum_{j \neq i} \alpha_j \bar{v}_j \quad \text{e poi poiché } \alpha_i \neq 0$$

$$\text{dividiamo per } \alpha_i \Rightarrow \bar{v}_i = \sum_{j \neq i} \left(-\frac{\alpha_j}{\alpha_i} \right) \bar{v}_j \quad \square$$

$(\Leftarrow)$

oss: Sia $S = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ un sistema ^{min.} di generatori per uno spazio vettoriale $V(K)$ e supponiamo

$$\exists i \text{ con } 1 \leq i \leq n \text{ tale che } \bar{v}_i = \sum_{j \neq i} \beta_j \bar{v}_j$$

(cioè che il sistema sia legato)

$$\Rightarrow L(S) = L(S \setminus \{\bar{v}_i\})$$

$$\mathbb{R}^3 = L((100), (010), (011)) =$$

$$= L((100), \underline{(210)}, \cancel{(010)}, \underline{(011)}, \cancel{(111)})$$

DIM DELL'OSSERVAZIONE.

Se $V = L(S) \Rightarrow \forall \bar{v} \in V$ abbiamo $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$

con $\bar{v} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_i \bar{v}_i + \dots + \alpha_n \bar{v}_n =$

$$\bar{v}_i = \sum_{j \neq i} \beta_j \bar{v}_j$$

non compare v_i

$$= \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_i \sum_{j \neq i} \beta_j \bar{v}_j + \dots + \alpha_n \bar{v}_n =$$

$$= \sum_{j \neq i} (\alpha_j + \alpha_i \beta_j) \bar{v}_j \in \mathcal{L}(S \setminus \{\bar{v}_i\}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(S) \subseteq \mathcal{L}(S \setminus \{\bar{v}_i\})$$

OVVIAMENTE

$$\mathcal{L}(S \setminus \{\bar{v}_i\}) \subseteq \mathcal{L}(S)$$

NE SEGUE

$$\mathcal{L}(S \setminus \{\bar{v}_i\}) = \mathcal{L}(S)$$

□

METODO DEGLI SCARTI SUCCESSIVI

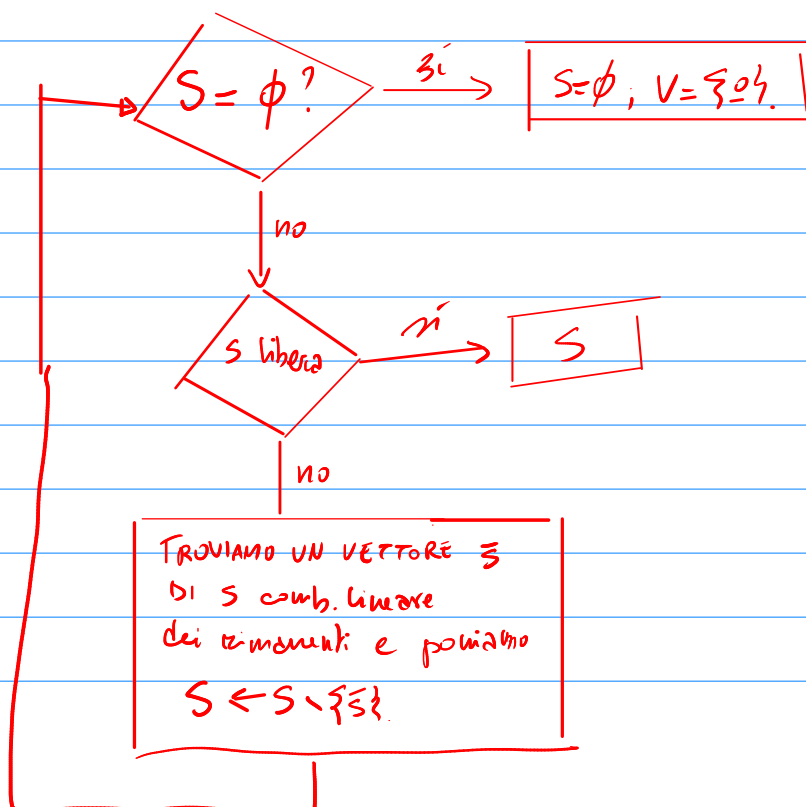
DATA UNA SEQUENZA

FINITA DI GENERATORI
PER $V(K)$

TROVAMO ϕ & $V = \{\underline{0}\}$

OPPURE UNA SEQ.

LIBERA DI GENERATORI
PER $V(K)$.



$$S \left(\overset{\bar{s}_1}{(100)}, \overset{\bar{s}_2}{(210)}, \overset{\bar{s}_3}{(010)}, \overset{\bar{s}_4}{(011)}, \overset{\bar{s}_5}{(111)} \right)$$

libera?

$$\bar{s}_3 = \bar{s}_2 - 2\bar{s}_1 \quad \bar{s}_4 = \frac{1}{2}(\bar{s}_2 - \bar{s}_3)$$

$$\boxed{\bar{s}_2 = 2\bar{s}_1 + \bar{s}_3}$$

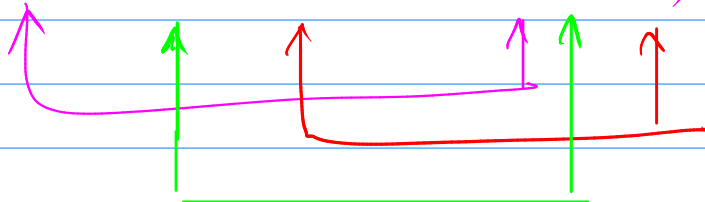
$$S' \left(\overset{\bar{s}'_1}{(100)}, \overset{\bar{s}'_2}{(010)}, \overset{\bar{s}'_3}{(011)}, \overset{\bar{s}'_4}{(111)} \right)$$

$$\boxed{\bar{s}'_4} = \bar{s}'_1 + 0\bar{s}'_2 + \bar{s}'_3$$

$$S'' \left((100), (010), (011) \right)$$

$$\alpha(100) + \beta(010) + \gamma(011) = (000)$$

$$= (\alpha, \beta + \gamma, \gamma) = (000) \Rightarrow \begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \gamma &= 0 \end{aligned}$$



$$\beta = 0$$

S'' è libera e genera lo stesso spazio vettoriale di S .

N.B Se $\bar{v} \in V(K)$ e $\bar{v} \neq \underline{0}$

$\Rightarrow$ la sequenza $(\bar{v})$ è libera.

In particolare se una seq. contiene almeno un vettore $\neq \underline{0} \Rightarrow$ essa contiene una sottosequenza libera.

$$S = (\underline{0}, \underline{0}, \underline{0}) \hookrightarrow \emptyset$$

"le sequenze libere sono 'più piccole' delle sequenze legate e anche delle seq. di generatori legati"

Proposizione, Sia S una sequenza di vettori di $V(K)$

$\rightarrow$ Se S è libera $\Rightarrow$ ogni sua sottosequenza è libera

$\rightarrow$ Se S è legata $\Rightarrow$ ogni sua sovra sequenza

è legata.

Dim

Sia $S = (\bar{v}_1 \text{ --- } \bar{v}_n)$ una seq. libera
e sia $S' = (\bar{v}_1 \text{ --- } \bar{v}_{n-1})$ una
sua sottosequenza. Se per
assurdo S' fosse legata $\Rightarrow$
 $\exists (\alpha_1 \text{ --- } \alpha_{n-1}) \neq (0 \text{ --- } 0)$

con
$$\alpha_1 \bar{v}_1 + \text{---} + \alpha_{n-1} \bar{v}_{n-1} = \underline{0}$$

ma allora
$$\alpha_1 \bar{v}_1 + \text{---} + \alpha_{n-1} \bar{v}_{n-1} + 0 \cdot \bar{v}_n = \underline{0}$$

e
$$(\alpha_1 \text{ --- } \alpha_{n-1} \text{ --- } 0) \neq (0 \text{ --- } 0)$$

$\Rightarrow S$ legata $\wedge$ assurdo.

S legata $S = (\bar{w}_1 \text{ --- } \bar{w}_n)$ legata

$$S' = (\bar{w}_1 \text{ --- } \bar{w}_n \text{ --- } \bar{w}_{n+1}).$$

Se S' fosse libera $\Rightarrow$

$$\alpha_1 \bar{w}_1 + \text{---} + \alpha_n \bar{w}_n + \alpha_{n+1} \bar{w}_{n+1} = \underline{0}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1 \text{ --- } \alpha_n \alpha_{n+1}) = (0 \text{ --- } 0)$$

ma S è legata $\Rightarrow \exists \beta_1 \dots \beta_n$ tali che

$$(\beta_1 \dots \beta_n) \neq (0 \dots 0) \text{ e}$$

$$\beta_1 \bar{w}_1 + \beta_2 \bar{w}_2 + \dots + \beta_n \bar{w}_n = 0$$

$$\Rightarrow \beta_1 \bar{w}_1 + \beta_2 \bar{w}_2 + \dots + \beta_n \bar{w}_n + 0 w_{n+1} = 0$$

$$\text{con } (\beta_1 \dots \beta_n \ 0) \neq (0 \dots 0)$$

quindi S' è legata $\checkmark$ $\square$

oss: Si poteva vedere la II parte del teorema

anche così: supponiamo S legata

ed $S \subseteq S'$ con S' libera $\Rightarrow$ per la

prima parte tutte le sottosequenze di S' sono libere $\Rightarrow \checkmark$ perché S legata. $\square$

Sia $V(k)$ uno spazio vettoriale finitamente generato ($\Rightarrow \exists$ una sequenza S con $|S| < \infty$ tale che $\mathcal{L}(S) = V$).

Sia G una sequenza di generatori per $V(k)$ e supponiamo $V(k) \neq \{0\}$.

Allora $V(K)$ ammette una sequenza libera di generatori $B \rightarrow$ scarti successivi.

Def: Si dice basi di uno spazio vettoriale $V(K)$ ogni sequenza libera di generatori di $V(K)$.

oss Se $V(K) \neq \{0\} \Rightarrow V(K)$ ammette basi.

Teorema: B sequenza $(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$ di vettori di $V(K)$ è una base ^(ordinata) per $V(K) \Leftrightarrow$ ogni vettore di $V(K)$ si scrive in modo unico come combinazione lineare degli elementi di B

DIM: Hp: B base $\Rightarrow \exists: \forall \bar{v} \in V(K) \exists! (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$ tale che $\bar{v} = \alpha_1 \bar{b}_1 + \dots + \alpha_n \bar{b}_n$

i) B è un sistema di generatori $\Rightarrow$ ogni vettore di $V(K)$ si scrive come c. lineare dei vettori di $B \Rightarrow \forall \bar{v} \in V(K) \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$ tale che $\bar{v} = \alpha_1 \bar{b}_1 + \dots + \alpha_n \bar{b}_n$

ii) Supponiamo per assurdo che $\exists \bar{v} \in V(K)$ che si scrive in 2 modi differenti

$$\bar{v} = \alpha_1 \bar{b}_1 + \dots + \alpha_n \bar{b}_n = \beta_1 \bar{b}_1 + \dots + \beta_n \bar{b}_n$$

$$(\alpha_1 \dots \alpha_n) \neq (\beta_1 \dots \beta_n)$$

$$\underline{0} = \bar{v} - \bar{v} = (\alpha_1 \bar{b}_1 + \dots + \alpha_n \bar{b}_n) - (\beta_1 \bar{b}_1 + \dots + \beta_n \bar{b}_n) =$$

$$= (\alpha_1 - \beta_1) \bar{b}_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) \bar{b}_n$$

$$\text{se } (\alpha_1 \dots \alpha_n) \neq (\beta_1 \dots \beta_n) \Rightarrow$$

$$(\alpha_1 - \beta_1 \dots \alpha_n - \beta_n) \neq (0 \dots 0)$$

$\Rightarrow \nexists$ perché B è libera.

§: B base $\Leftrightarrow \forall v \in V(K) \exists! (\alpha_1 \dots \alpha_n) \in K^n$
 tali che $\bar{v} = \alpha_1 \bar{b}_1 + \dots + \alpha_n \bar{b}_n$

i) Se $\forall \bar{v} \in V(K)$ si scrive in modo unico

$\Rightarrow \underline{0}$ si scrive in modo unico
 come c. lineare dei vettori di B

ma $\underline{0}$ si scrive sempre come c. lineare

a coeff $(0 \dots 0) \Rightarrow$

l'unica c. lineare dei vettori di B

che dà $\underline{0}$ è quella a coeff $(0 \dots 0)$

$\Rightarrow B$ è libera.

ii) $\forall v \in V(K)$ è c. lineare dei vettori di B
 $\Rightarrow V(K) \subseteq L(B)$ ma $B \subseteq V(K)$
 $L(B) \subseteq V(K) \subseteq L(B)$ e quindi
 B sequenza di generatori $\square$

Es. $K^n = \{(a_1 \dots a_n) \mid a_i \in K\}$

Base canonica $B = ((\overset{\bar{e}_1}{1} \ 0 \ 0 \dots 0), (0 \ \overset{\bar{e}_2}{1} \ 0 \dots 0), \dots$
 $\dots (0 \ 0 \dots 0 \ \overset{\bar{e}_n}{1}))$

osserviamo che

$$(a_1 \ a_2 \dots a_n) = a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + \dots + a_n \bar{e}_n$$

i coeff. della combinazione lineare dei
 vettori di B (= componenti rispetto a B)
 che danno il vettore $(a_1 \ a_2 \dots a_n)$
 sono proprio $(a_1 \ a_2 \dots a_n)$

$\Rightarrow B$ è detta base canonica di K^n

$\mathbb{R}^3$ $B = ((\overset{\bar{e}_1}{1} \ 0 \ 0), (\overset{\bar{e}_2}{0} \ 1 \ 0), (\overset{\bar{e}_3}{0} \ 0 \ 1))$

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha \bar{e}_1 + \beta \bar{e}_2 + \gamma \bar{e}_3$$

N.B

$$B' = ((\overset{\bar{f}_1}{1 \ 0 \ 0}), (\overset{\bar{f}_2}{0 \ 0 \ 1}), (\overset{\bar{f}_3}{0 \ 1 \ 0}))$$

NON È LA BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^3$!

$$(\alpha \ \beta \ \gamma) = \alpha \bar{f}_1 + \gamma \bar{f}_2 + \beta \bar{f}_3$$

ha componenti $(\alpha \ \gamma \ \beta)$

$$B'' = ((\overset{\bar{e}_1}{1 \ 1 \ 1}), (\overset{\bar{e}_2}{1 \ -1 \ 0}), (\overset{\bar{e}_3}{1 \ 1 \ 0}))$$

$$\mathbb{R}^{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$B = \left((\overset{\bar{e}_1}{1 \ 0 \ 0}), (\overset{\bar{e}_2}{0 \ 1 \ 0}), (\overset{\bar{e}_3}{0 \ 0 \ 1}), (\overset{\bar{e}_4}{0 \ 0 \ 1}) \right)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \bar{e}_1 + b \bar{e}_2 + c \bar{e}_3 + d \bar{e}_4$$

Il vettore delle componenti rispetto a B

$$\text{è } (a \ b \ c \ d) \in \mathbb{R}^4$$

↓

$$a \bar{e}_1 + b \bar{e}_2 + c \bar{e}_3 + d \bar{e}_4$$

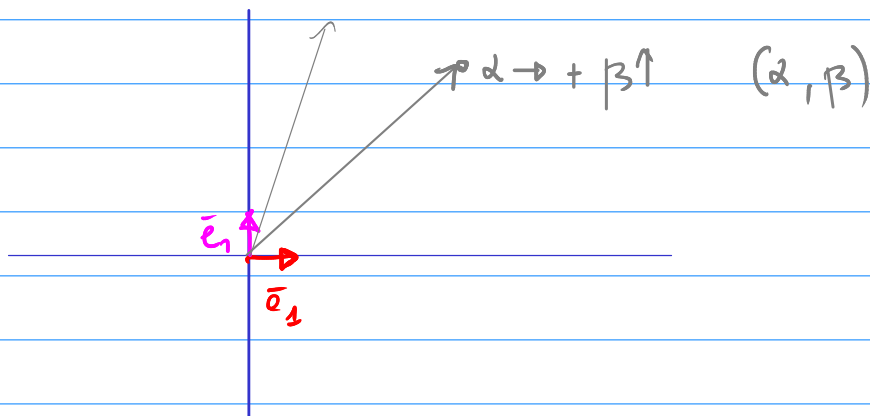
$$B' = \left((\overset{\bar{e}_1}{1 \ 0 \ 0}), (\overset{\bar{e}_2}{0 \ 1 \ 0}), (\overset{\bar{e}_3}{0 \ 0 \ 1}), (\overset{\bar{e}_4}{1 \ 0 \ 0}) \right)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightsquigarrow (a \ b \ d \ c)$$

$$\mathcal{B} = (\rightarrow, \uparrow)$$

$$\nearrow = \alpha \rightarrow + \beta \uparrow$$

$$\downarrow \\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$$



Def: Siano $V(K)$ e $W(K)$ due spazi vettoriali sul medesimo campo K .

Una funzione $f: V(K) \rightarrow W(K)$ è detta applicazione lineare se

$$\forall \bar{u}, \bar{v} \in V, \forall \alpha, \beta \in K: f(\alpha \bar{u} + \beta \bar{v}) = \alpha f(\bar{u}) + \beta f(\bar{v})$$

f manda combinazioni lineari in comb. lineari con

i medesimi coeff.

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a, b, c) \rightarrow (a, b) \end{cases}$$

$$f': \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \{0\} \\ (a, b, c) \rightarrow 0 \end{cases}$$

Def: Sia $f: V(K) \rightarrow W(K)$ una applicazione lineare. Chiamiamo nucleo di f ($\ker(f)$ = kernel di f)

Il sottoinsieme di $V(K)$

$$\ker f = \{ \bar{v} \in V \mid f(\bar{v}) = 0 \}$$

Oss: 1) $\ker f \leq V(K)$ sottospazio

2) f è iniettiva $\Leftrightarrow \ker f = \{0\}$.

DIM 1) Siano $\bar{u}, \bar{v} \in \ker f \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall \alpha, \beta \in K, f(\alpha \bar{u} + \beta \bar{v}) =$$

$$= \alpha f(\bar{u}) + \beta f(\bar{v}) = \alpha 0 + \beta 0 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha \bar{u} + \beta \bar{v} \in \ker f$$

2) Supponiamo f iniettiva $\Rightarrow \ker f = \{0\}$
perché $\exists!$ vettore $\bar{v} \in V: f(\bar{v}) = 0$
e $f(0) = 0$

Viceversa: Sia $\ker f = \{0\}$ e
supponiamo $\exists \bar{u}, \bar{v} : f(\bar{u}) = f(\bar{v})$
 $\Rightarrow f(\bar{u}) - f(\bar{v}) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(\bar{u} - \bar{v}) = 0 \Rightarrow \bar{u} - \bar{v} \in \ker f$
 $\Rightarrow \bar{u} - \bar{v} = 0$ da cui $\bar{u} = \bar{v}$ $\square$

