

Spazio vettoriale V su di un campo K $V(K)$

1) $(V, \oplus)$ è un gruppo abeliano; gli elementi di V sono detti vettori.

2) $\exists *: K \times V \longrightarrow V$ detto prodotto per scalare tale che

I) $1 * \bar{v} = \bar{v} \quad \forall \bar{v} \in V$

II) $\forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha + \beta) * \bar{v} = (\alpha * \bar{v}) \oplus (\beta * \bar{v})$

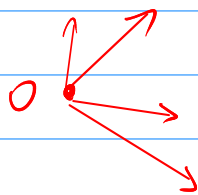
III) $\forall \alpha \in K, \forall \bar{v}, \bar{w} \in V \quad \alpha * (\bar{v} + \bar{w}) = (\alpha * \bar{v}) \oplus (\alpha * \bar{w})$

IV) $\forall \alpha, \beta \in K, \forall \bar{v} \in V \quad (\alpha\beta) * \bar{v} = \alpha * (\beta * \bar{v})$.

Gli elementi di K sono detti scalari.

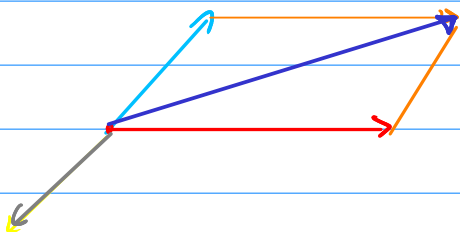
Esempi

Nel piano consideriamo l'insieme di tutti i segmenti orientati (freccie) puntati nell'origine.



Definiamo la somma di 2 frecce come la freccia che si ottiene congiungendo l'origine con il termine del traslato della II freccia che parte dal termine della prima

$\alpha \in \mathbb{R}$



se $\alpha > 0$ / il prodotto di una freccia $\bar{v}$ è la freccia che ha lunghezza α volte la lunghezza di $\bar{v}$

Direzione e verso

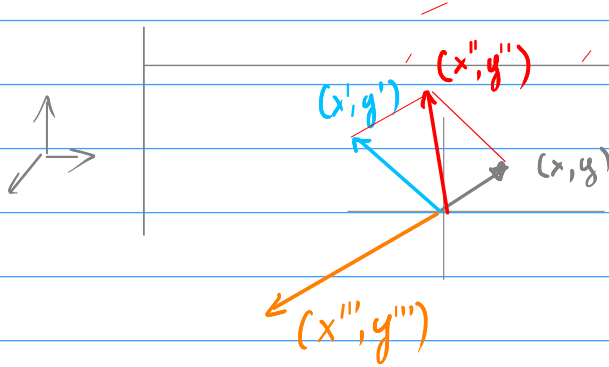
uguali a quelli di $\vec{v}$

$$2 * \nearrow = \nearrow$$

$$-1 * \nearrow = \searrow$$

se $\alpha < 0 \Rightarrow \alpha \cdot \vec{v}$ è la

freccia che ha lunghezza
 $-\alpha$ volte la lunghezza di $\vec{v}$
 direzione = alla direzione di $\vec{v}$
 verso opposto al verso di $\vec{v}$



$$(x'', y'') = (x + x', y + y')$$

$$(x''', y''') = \alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

Esempio II

consideriamo $\mathbb{K}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{K}\}$.

con $\mathbb{K}$ campo

$$(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$$

$$(a_1, \dots, a_n) \oplus (b_1, \dots, b_n) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$\alpha * (a_1, \dots, a_n) := (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n)$$

$\mathbb{K}^n$ è dotato di struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{K}$

Verificando per $\mathbb{K}^2$ $(x, y) \in \mathbb{K}^2$

$$I) 1 * (x, y) = (1 \cdot x, 1 \cdot y) = (x, y)$$

$$II) \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad (\alpha + \beta) * (x, y) = ((\alpha + \beta)x, (\alpha + \beta)y) = (\alpha x + \beta x, \alpha y + \beta y) =$$

$$= (\alpha x, \alpha y) \oplus (\beta x, \beta y) = \alpha * (x, y) \oplus \beta * (x, y)$$

$$\forall \alpha \in K, (x, y), (x', y') \in K^2$$

$$\begin{aligned} \alpha * ((x, y) \oplus (x', y')) &= \alpha * (x + x', y + y') = \\ &= (\alpha(x + x'), \alpha(y + y')) = (\alpha x + \alpha x', \alpha y + \alpha y') = \\ &= (\alpha x, \alpha y) \oplus (\alpha x', \alpha y') = \\ &= [\alpha * (x, y)] \oplus [\alpha * (x', y')] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{IV)} \quad (\alpha \beta) * (x, y) &= ((\alpha \beta)x, (\alpha \beta)y) = (\alpha(\beta x), \alpha(\beta y)) = \\ &= \alpha * (\beta x, \beta y) = \alpha * (\beta * (x, y)) \end{aligned}$$

□

0 = (0, 0) è l'elemento neutro per $\oplus$

$$(x, y) \oplus (-x, -y) = (0, 0)$$

vale la prop. associativa e pure quella commutativa

DA ORA IN POI INDICHERÒ SOLITAMENTE LA SOMMA DI VETTORI CON $+$ e il prodotto per scalare con $\cdot$.

Esempio: $K^{m,n}$ = insieme di tutte le matrici $m \times n$ ad entrate in K .

Somma componente per componente.
prodotto per scalare componente per componente

$$K^{2,2} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} \quad \leftarrow$$

$$K^{4,1} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in K \right\} \quad \leftarrow$$

$$K^{4,4} = \left\{ (a \ b \ c \ d) \mid a, b, c, d \in K \right\} \quad \leftarrow \quad \underline{\text{ISOMORFI}}$$

Esempio

Sia K un campo.

$$\mathcal{F}(K) := \{ f: K \rightarrow K \mid f \text{ funzione} \}$$

$$f, g \text{ definisco } (f+g) \begin{cases} K \rightarrow K \\ x \mapsto f(x) + g(x) \end{cases}$$

$$(\alpha f) \begin{cases} K \rightarrow K \\ x \mapsto \alpha f(x) \end{cases}$$

Abbiamo che $\mathcal{F}(K)$ è uno spazio vettoriale.

Esempio $K[x] = \{ p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \mid a_i \in K, n \in \mathbb{N} \}$

$\nearrow$

insieme di tutti i polinomi in x a coeff. in K .

$$(\underline{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots}) + (\underline{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots}) =$$

$$= (\underline{a_0 + b_0}) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots$$

$$\mu(\underline{a_0 + a_1 x + \dots}) := (\mu a_0) + (\mu a_1)x + \dots$$

deg = degree

$$K_n[x] = \{ p(x) \in K[x] \mid \deg p(x) < n \} \approx K^n$$

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} \quad (a_0 \dots a_{n-1})$$

↑ Teorema: Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale sul campo K , $\alpha \in K$, $\bar{v} \in V$ allora abbiamo

$$\alpha \cdot \bar{v} = \underline{0} \iff \alpha = 0 \text{ oppure } \bar{v} = \underline{0}$$

DIM.: consideriamo

$$0 \cdot \bar{v} = (0 + 0) \cdot \bar{v} = 0 \cdot \bar{v} + 0 \cdot \bar{v}$$

sommiamo a destra e sinistra $- 0 \cdot \bar{v}$

$$\underline{0} = (0 \cdot \bar{v} + (-0 \cdot \bar{v})) = 0 \cdot \bar{v} + 0 \cdot \bar{v} + \underline{(-0 \cdot \bar{v})}$$

$$\Rightarrow 0 \cdot \bar{v} = \underline{0}$$

Supponiamo $\alpha \cdot \bar{v} = \underline{0}$ se $\alpha = 0$ fine

consideriamo $\alpha \neq 0 \Rightarrow \exists \alpha^{-1} \in K \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha^{-1} \cdot (\alpha \bar{v}) = \alpha^{-1} \cdot \underline{0}$$

||

$$(\alpha^{-1} \cdot \alpha) \bar{v} = 1 \bar{v} = \bar{v}$$

$$\bar{v} = (\alpha^{-1} \underline{0})$$

osserviamo che $\alpha^{-1} \underline{0} = \alpha^{-1} (\underline{0} + \underline{0}) = \alpha^{-1} \underline{0} + \alpha^{-1} \underline{0}$

$$\text{da cui } \alpha^{-1} \underline{0} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \bar{v} = \underline{0}$$

□

↳

ALTRA CONSEGUENZA

Corollario

Sia -1 l'opposto di 1 in K

$$\Rightarrow -\bar{v} = (-1)\bar{v}$$

Dim $(1-1)\bar{v} = 1\bar{v} + (-1)\bar{v} = \bar{v} + (-1)\bar{v}$
 $\parallel$
 $0 \cdot \bar{v} = \underline{0}$

$$\Rightarrow -\bar{v} = (-1)\bar{v} \quad \square$$

N.B In $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$.

$$(x,y) \quad -(x,y) = (-x,-y) = -1(x,y)$$

$$(x,y) + (-x,-y) = (x-x, y-y) = (0,0) \underline{,}$$

Sottospazio vettoriale

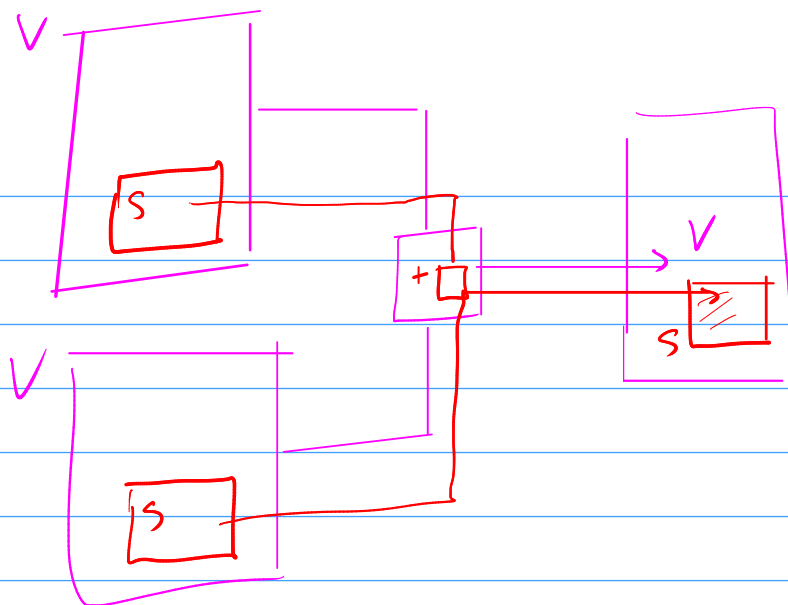
$$\mathbb{R}^3 = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$$

$$S = \{(a,b,0) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

$$\left[\begin{array}{l} (S, +)_{S \times S} \text{ sia un gruppo abeliano} \\ \forall a \in \mathbb{R}, \forall \bar{v} \in S \quad a \cdot \bar{v} \in S \end{array} \right] \text{ PROPRIETÀ DI CHIUSURA}$$

Valgono gli assiomi I - IV $\parallel$

Si dice sottospazio vettoriale S di $V(K)$ un sottoinsieme di V tale che S dotato dell'operazione di somma di $(V, +)$ ristretta ad $S \times S$ e troncata ad S e di prodotto per scalare di $V(K)$ ristretto a $K \times S$ e troncato ad S sia uno spazio vettoriale su K .



Teorema: S è sottospazio vettoriale di $V(K)$
 se e solo se $\forall \alpha, \beta \in K$,
 $\forall \bar{v}, \bar{w} \in S$

$$\alpha \bar{v} + \beta \bar{w} \in S.$$

" S è chiuso rispetto le combinazioni lineari"

DIM: 1) S può essere sottospazio vettoriale due
 essere chiuso rispetto le c. lineari.

(se non lo fosse $\exists \bar{v}, \bar{w} \in S$ tali che

$$\bar{v} + \bar{w} \notin S \quad \text{oppure} \quad \alpha \in K \text{ con } \alpha \cdot \bar{v} \notin S)$$

2) Verifichiamo che $(S, + \Big|_{S \times S}^{\text{↖ restr. ad } S})$

↗ restr. ad $S \times S$

è un gruppo abeliano. e S è chiuso
 rispetto le c. lineari.

A) $0 \in K \quad \bar{v} \in S \quad 0 \cdot \bar{v} = \underline{0} \in S$ il neutro

B) $\forall \bar{v} \in S \quad (-1) \cdot \bar{v} = -\bar{v} \in S$ opposto di $\bar{v}$

$$c) \forall \bar{v}, \bar{w} \in S$$

$$1 \cdot \bar{v} + 1 \cdot \bar{w} \in \bar{v} + \bar{w} \in S$$

La somma di 2
vettori di S sta in S .

D) prop. assoc. e commutativa valgono in
 V e dunque anche su di un suo sottosistema.

1) Verifichiamo $\left. \begin{matrix} * \\ |_{K \times S} \end{matrix} \right| K \times S \rightarrow S$ è un

prodotto per scalare.

per ipotesi di chiusura rispetto le

combinazioni lineari $\forall \alpha \in K \forall \bar{v} \in S \quad \alpha \bar{v} \in S$.

[mettiamo $\beta = 0$].

Le altre prop. valgono per tutta V

e dunque anche per S .

□

$\mathbb{R}^3$

Quali sono sottospazi?

$$A = \{ (x^2, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

$$B = \{ (x+y, y, x) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

$$C = \{ (x, y+1, 0) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

$$D = \{ (1, x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

