Algebra e Geometria

→ Teoria degli insiemi + strutture geometriche

Insieme = collezione di oggetti non ordinata
senza ripetizioni

X noi possiamo sempre

1) dire se $x \in X$
2) scegliere $x \in X$ in modo arbitrario.

$1 \in \{1,2,3\} = X$ $\qquad \{A, x, 7, \uparrow\}$

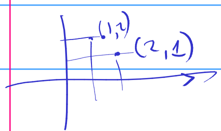
$5 \notin$

$$\{1,2,3\} = \{2,1,3\} = \{1,1,2,3\}$$

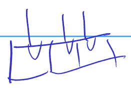
SISTEMA: collezione di oggetti con molteplicità
(multinsieme)

$$[1,2,3] = [2,3,1] \neq [1,1,2,3] = [2,3,1,1]$$

SEQUENZA: collezione di oggetti con ordine e molteplicità



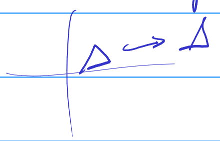
$$(1,2,3) \neq (1,3,2) \neq (1,1,3,2)$$

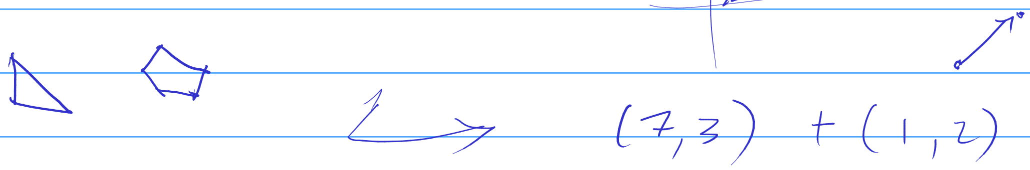


$\boxed{\begin{array}{l} \text{List}(X,\ x \to f(x)) \\ \to \text{Set}(X,\ x \to f(x)) \end{array}}$

Algebra: studio delle operazioni su insiemi.

Geometria → interpretazione dell'algebra





$$(7,3) + (1,2)$$

prodotto cartesiano di 2 insiemi

tale che

$$A \times B \longrightarrow C = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

↘ seq. di 2 elementi

$(a,b) := \{\{a\},\{a,b\}\}.$

è per definizione

$(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}.$ $\quad a \neq b$

$(b,a) = \{\{b\},\{a,b\}\}.$

$(a,a) = \{\{a\},\{a,a\}\} = \{\{a\},\{a\}\} = \{\{a\}\}$

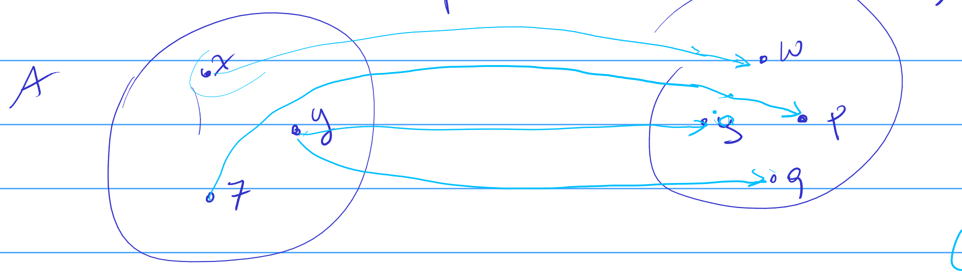
Def: Siano A, B due insiemi. Si dice <u>corrispondenza</u> fra A e B ogni sottoinsieme

$$T \subseteq A \times B$$

Def: Una corrispondenza T è detta <u>ovunque definita</u> se $\forall a \in A \ \exists b \in B$ con $(a,b) \in T$

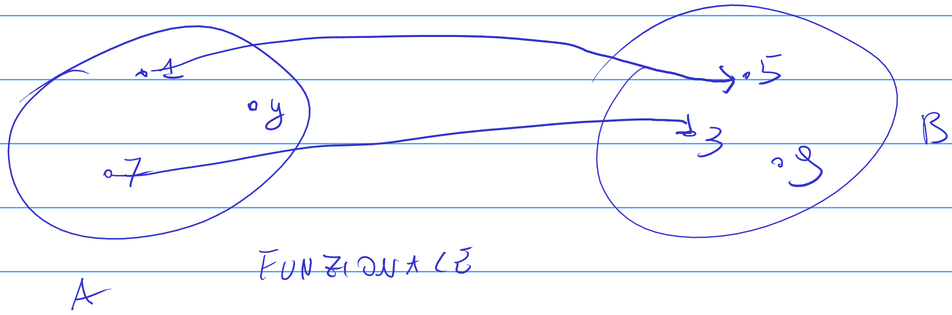
Una corrispondenza è <u>funzionale</u> se

$$\forall a \in A \ \exists \text{ al più un } b \in B : (a,b) \in T$$



$(x,w), (7,p),$
$(y,3), (y,q)$

OVUNQUE DEFINITA



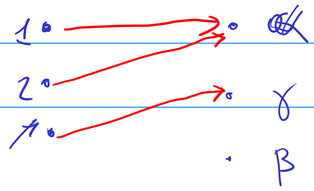
FUNZIONALE

Def: Si dice funzione $f: A \to B$ una corrispondenza funzionale ovunque definita

A = dominio di f

B = codominio di f

$f \subseteq A \times B$



$\{1,2,7\} \quad \{\alpha,\beta,\gamma\}. \quad f = \{(1,\alpha),(2,\alpha),(7,\gamma)\}$

Se $(x,y) \in f$ scriveremo $f(x) = y$

Def: Una funzione $f: A \to B$ è detta
<u>iniettiva</u> se $\forall b \in B$ $\exists$ al più un $a \in A : f(a) = b$

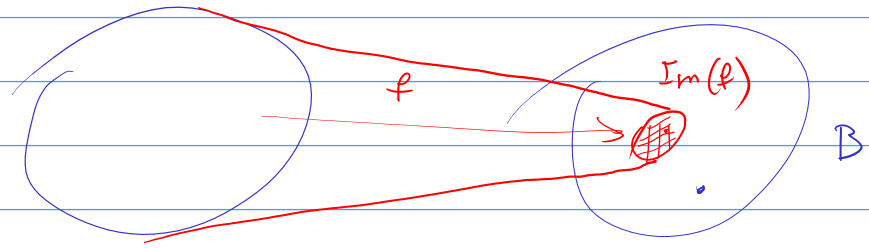
<u>Suriettiva</u> se $\forall b \in B$ $\exists$ almeno $a \in A : f(a) = b$
<u>Biiettiva</u> se $\forall b \in B$ $\exists! a \in A : f(a) = b$

esiste ed è unico

Oss: Sia $f: A \to B$ una funzione.
Si dice immagine di f ($Im(f)$ oppure ~~$f(A)$~~)
l'insieme $Im(f) = \{ b \in B \mid \exists a \in A \text{ con } f(a) = b \}$.

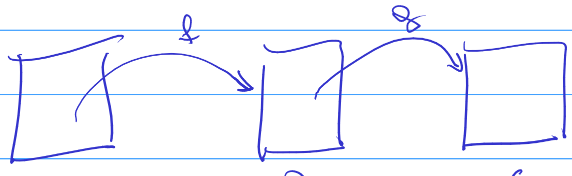
f è per costruzione suriettiva sulla sua immagine!

$f: A \to B$



Non è detto $Im(f) = B$
IMMAGINE $\subseteq$ CODOMINIO

Def: Siano $f: A \to B$ e $g: B \to C$ due funzioni.
Si dice funzione composta $h = g \circ f : A \to C$
la funzione $h(x) = g(f(x))$ $\forall x \in A$



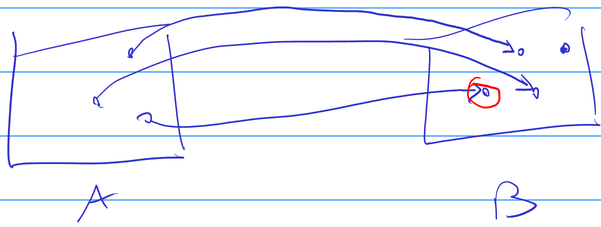
$f = \{ (a,b) \mid b = f(a) \}$ $g = \{ (b,c) \mid c = g(b) \}$.

& = et

$h \doteq \{ (a,c) \mid \exists b \in B \text{ con } (a,b) \in f \ \& \ (b,c) \in g \}$.

oss: Sia $f: A \to B$ una funzione.
Quando è possibile tornare indietro?

Quando $\exists\, g: B \to A$ con $(g \circ f)(x) = x \quad \forall x \in A$



$f(1)=2$
$f(2)=3$
$f(3)=3$

La funzione $f: A \to B$ ammette inversa sinistra $g: B \to A$ tale che $(g \circ f): A \to A$ e

$(g \circ f)(x) = x \quad \forall x \in A$

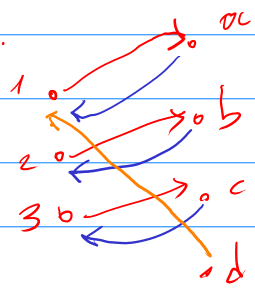
$\Leftrightarrow$ f è iniettiva

se e solamente se

→ 1) Si invertono tutte le frecce
2) Se ci sono elementi di B non in $Im(f)$ si assegna loro un valore a caso.

$A = \{1,2,3\}$ $\qquad$ $B = \{a, b, c, d\}$.

$f = \{(1,a), (2,b), (3,c)\}$.



$g = \{(a,1), (b,2), (c,3), (d,1)\}$.

Oss: Sia $f: A \to B$ funzione. Si dice inversa a destra di f una funzione

$$g: B \to A$$

tale che $\forall x \in B: f(g(x)) = x$

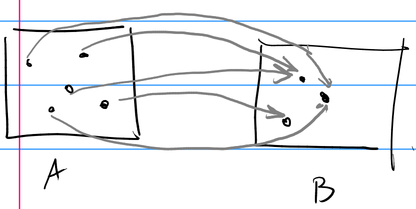
Teorema: $\exists$ una inversa destra $\iff$ f è suriettiva.

Def: Una funzione f è detta biettiva $\iff$ è iniettiva e suriettiva.

In particolare f è biettiva $\iff$ ammette inversa destra e sinistra. Si verifica che tali inverse coincidono e si chiama tale funzione inversa di f (scritta come f^{-1})

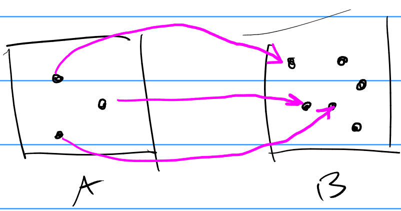
Oss: $f: A \to B$ biettiva implica $|A| = |B|$

FUNZIONE SURIETTIVA



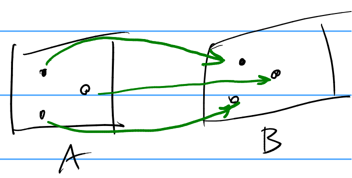
$|B| \leq |A|$

FUNZIONE INIETTIVA



$|B| \geq |A|$

FUNZIONE BIETTIVA



$|A| = |B|$

$\mathbb{N}$ numeri naturali $\quad 2\mathbb{N}$ numeri naturali pari

$$f: \begin{cases} \mathbb{N} \to 2\mathbb{N} \\ n \to 2n \end{cases}$$

biettiva $\quad |\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}|$

$\mathbb{N}$ numeri naturali $(\mathbb{N}, +)$ $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$\mathbb{Z}$ numeri interi $(\mathbb{Z}, +)$

$\mathbb{Q}$ numeri razionali

$\mathbb{R}$ numeri reali

$\mathbb{C}$ numeri complessi

$3x + 5y = 7$ $\left\{ x = \frac{7 - 5y}{3} \quad \forall y \in \mathbb{Q} \right\}$

$y' = 2 \;, \; x' = -3$

$3 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 = 1$

17

$y = 14 \quad x = -21$