Spazio vettoriale $(V,+)$ su $\mathbb{K}$.

insieme di vettori.

Sommare i vettori
Moltiplicare i vettori per $\alpha \in \mathbb{K}$

$\mathbb{K}^n$ $\qquad$ $\mathbb{K}^{m,n}$ $\qquad$ $\mathbb{K}[x]$

$$\mathbb{R}^{\mathbb{R}} := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}.$$

$$\to \quad (f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(\alpha f)(x) := \alpha \cdot f(x) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Teorema: Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e siano $\bar{v}\in V$, $\alpha\in\mathbb{K}$.

ALLORA $\alpha\cdot\bar{v}=\underline{0} \iff \alpha=0$ oppure $\bar{v}=\underline{0}$

DIM $(\Leftarrow)$: innanzi tutto facciamo vedere che $0\cdot\bar{v}=\underline{0}$

$$0\cdot\bar{v}=(0+0)\cdot\bar{v}=0\cdot\bar{v}+0\cdot\bar{v}$$

sommo a dx e a sx $-0\cdot\bar{v}$

$$\underbrace{0\cdot\bar{v}+(-0\cdot\bar{v})}_{=\,\underline{0}}=\underbrace{0\cdot\bar{v}+\underbrace{0\cdot\bar{v}+(-0\cdot\bar{v})}_{=\,\underline{0}}}_{=\,0\cdot\bar{v}+\underline{0}\,=\,0\cdot\bar{v}}$$

II) mostriamo che $\alpha\cdot\underline{0}=\underline{0}\quad\forall\alpha$

$$\alpha\cdot\underline{0}=\alpha\cdot(\underline{0}+\underline{0})=\alpha\cdot\underline{0}+\alpha\cdot\underline{0}$$

come prima $\Rightarrow\ \underline{0}=\alpha\cdot\underline{0}$

($\Leftarrow$)

Sia $\alpha \cdot \bar{v} = \underline{0}$ e supponiamo $\alpha \neq 0$ (se $\alpha = 0 \Rightarrow$ NIENTE DI NUOVO DA DIMOSTRARE).

$$\Rightarrow \exists \alpha^{-1} \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot \bar{v}) = \alpha^{-1} \cdot \underline{0} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow (\alpha^{-1}\alpha) \cdot \bar{v} = \underline{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \cdot \bar{v} = \bar{v} = \underline{0} \qquad \square$$

<u>Corollario</u>: $\forall \bar{v} \in V$

$$-\bar{v} = (-1) \cdot \bar{v}$$

<u>DIM</u>: $1 \cdot \bar{v} + (-1) \cdot \bar{v} = (1-1) \cdot \bar{v} = 0 \cdot \bar{v} = \underline{0}$

$$\bar{v} + (-1) \cdot \bar{v} = \underline{0}$$

sommo a dx e sx $-\bar{v}$ e ottengo

$$\boxed{(-1) \cdot \bar{v}} = (-\bar{v}) + \bar{v} + (-1) \cdot \bar{v} = (-\bar{v}) + \underline{0} = \boxed{-\bar{v}} \qquad \square$$

3 DOMANDE + 1

1) ci sono sottostrutture?
2) come si possono costruire a partire da strutture più piccole?
3) Quali sono le trasformazion

della struttura?

4) A cosa servono ???...

Cosa è un sottospazio vettoriale $W \leq V(\mathbb{K})$?

$\subseteq$ ← sottoinsieme

$\leqslant$ ← sottostruttura.

$W \leq V(\mathbb{K})$ se $W \subseteq V$ rispetto le operazioni di $V(\mathbb{K})$ opportunamente ristrette e troncate soddisfa gli assiomi di spazio vettoriale.

In $V(\mathbb{K})$ abbiamo

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$$

$W \subseteq V$

possiamo restringere $+$, $\cdot$
a $W \times W$ e $\mathbb{K} \times W$

$$+\big|_{W\times W} : \underline{W \times W} \longrightarrow \underline{\underline{V}}$$

$$\cdot\big|_{\mathbb{K}\times W} : \underline{\mathbb{K} \times W} \longrightarrow \underline{\underline{V}}$$

potrebbero prendere $\bar{x}, \bar{y} \in W$
e darci $\bar{x} + \bar{y} \in V \setminus W$!!

DOBBIAMO ANCHE "TRONCARE IL CODOMINIO" $\to$ imporre che dati in ingresso el. di W si abbiano in uscita el. di W.

$$+\big|_{W\times W}^{W} : \underline{\underline{W}} \times \underline{\underline{W}} \longrightarrow \underline{\underline{W}}$$

$$\cdot\big|_{\mathbb{K}\times W}^{W} : \mathbb{K} \times \underline{\underline{W}} \longrightarrow \underline{\underline{W}}$$

N.B: La restrizione si può sempre fare e ci fornisce "nuove" operazioni

→ Il troncamento è una operazione ⟺

$$\begin{cases} \operatorname{Im}\left(+ \big|_{W \times W} \right) \subseteq W \\ \operatorname{Im}\left(\cdot \big|_{W \times W} \right) \subseteq W \end{cases}$$

Ammesso di poter fare restrizione + troncamento ed avere le nuove operazioni

→ verifichiamo che W con esse soddisfa gli assiomi di S. Vettoriale su $\mathbb{K}$.

Questo è gratis!

OSSERVIAMO CHE SE $W \neq \emptyset$

$$+\Big|_{W\times W}^{W} = +'$$

$$\cdot\Big|_{\mathbb{K}\times W}^{W} = \cdot'$$

ristrette e troncate sono operazioni su $W \Rightarrow$ gli assiomi di s. vett. sono automaticamente soddisfatti.

1) $(W, +')$ è gruppo.

a) $\forall \bar{w} \in W: \ 0 \cdot \bar{w} = \underline{0} \in W$ el. neutro c'è.

b) $\forall \bar{w} \in W: \ -1 \cdot \bar{w} \in W \Rightarrow -\bar{w} \in W$ (opposto c'è).

c) $\forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in W:$

$$\bar{u} +' (\bar{v} +' \bar{w}) =$$

$$= \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} =$$

$$= (\bar{u} +' \bar{v}) +' \bar{w} \quad \text{assoc.}$$

d) $\forall \bar{u}, \bar{v} \in W: \ \bar{u} +' \bar{v} = \bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u} = \bar{v} +' \bar{u}$

$\bar{w} \in W$

a) $1 \in \mathbb{K} \quad 1 \cdot' \bar{w} = 1 \cdot \bar{w} = \bar{w}$

b) $(\alpha + \beta) \cdot' \bar{w} = (\alpha + \beta) \cdot \bar{w} =$

$$= \alpha \cdot \bar{w} + \beta \cdot \bar{w} =$$

$$= \alpha \cdot' \bar{w} + \beta \cdot' \bar{w}$$

c) $(\alpha\beta) \cdot' \bar{w} = (\alpha\beta) \cdot \bar{w} = \alpha \cdot (\beta \cdot \bar{w}) =$

$$= \alpha \cdot' (\beta \cdot' \bar{w})$$

d) $\alpha \cdot' (\bar{u} +' \bar{w}) = \alpha \cdot (\bar{u} + \bar{w}) =$

$$= \alpha \cdot \bar{u} + \alpha \bar{w} =$$

$$= \alpha \cdot' \bar{u} +' \alpha \cdot' \bar{w}$$

GLI ASSIOMI SONO SODDISFATTI

Se valgono le prop. nell'ambiente più grande, valgono anche in quello più piccolo a patto di non "uscire" da esso.

In $\mathbb{R}^3 = \{(a\ b\ c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$.

$$(a\ b\ c) + (d\ e\ f) = (a+d\ \ b+e\ \ c+f)$$

$$\alpha \cdot (a\ b\ c) = (\alpha a\ \ \alpha b\ \ \alpha c).$$

$W_0 = \{(a\ b\ 0) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$.

é sottospazio?

$W_1 = \{(a\ b\ 1) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$. **NO** $\not\ni (0\,0\,0) \in \mathbb{R}^3$

$W_2 = \{(a^2\ 0\ 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

$W_3 = \{(a-b\ \ 2a+b,\ b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$.

$W_4 = \{(a\ b,\ a+b+k) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

per quali k é sottospazio.

W1)

$(1\,0\,1),\ (0\,1\,1) \in W_1$

$(1\,0\,1) + (0\,1\,1) = (1\,1\,2) \notin W_1$

$W_2 = \{(a^2\ 0\ 0) \mid a \in \mathbb{R}\}.$

$(a^2\ 0\ 0),\ (b^2\ 0\ 0) \in W_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a^2\ 0\ 0) + (b^2\ 0\ 0) = (a^2+b^2\ 0\ 0) =$

ma in $\mathbb{R}$ ogni numero reale ~~positivo~~ non negativo ha una radice non negativa

$= (c^2\ 0\ 0)$ con $c = \sqrt{a^2+b^2}$

$(0\ 0\ 0) \in W_2$

$-1 \cdot (1\ 0\ 0) = (-1\ 0\ 0) \notin W_2$

NON È SOTTOSPAZIO.

Def

Siano $\bar{v}, \bar{w} \in V(\mathbb{K})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Si dice combinazione lineare di $\bar{v}$ e $\bar{w}$ con gli scalari α, β il vettore

$$\alpha \bar{v} + \beta \bar{w}$$

chiaramente se $\bar{v}_1 \, \bar{v}_2 \dots \bar{v}_n \in V(\mathbb{K})$

$\alpha_1 \, \alpha_2 \dots \alpha_n \in \mathbb{K}$.

possiamo considerare la c. lineare

$$\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n =$$

$$= \sum_i \alpha_i \bar{v}_i$$

Teorema: Sia $W \subseteq V(\mathbb{K})$.

Allora $W \leq V(\mathbb{K})$ se e solo se $\forall \bar{u}, \bar{v} \in W \; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$\alpha \bar{u} + \beta \bar{v} \in W$$

"W é chiuso rispetto le combinazioni

lineari".

<u>DIM</u>: Se $W \leq V(\mathbb{K}) \Rightarrow$ le c. lineari di due suoi qualsiasi vettori devono dare un vettore di $V(\mathbb{K})$.

Viceversa: se $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall \bar{u}, \bar{v} \in W$

$$\alpha \bar{u} + \beta \bar{v} \in W \Rightarrow$$

in particolare:

1) $\alpha = 1, \beta = 1$ $\quad \bar{u} + \bar{v} \in W$

2) $\alpha = 0, \beta = 0$ $\quad \underbrace{0 \cdot \bar{u} + 0 \cdot \bar{v}}_{= \underline{0}} \in W$

3) $\beta = 0 \Rightarrow \alpha \bar{u} = \alpha \bar{u} + 0 \cdot \bar{v} \in W$

in particolare se $\alpha = -1 \Rightarrow -\bar{u} \in W$.

$\square$

$W_0 = \{(a \ b \ 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$

$\alpha(a \ b \ 0) + \beta(a' \ b' \ 0) =$

$= (\alpha a \ \alpha b \ 0) + (\beta a' \ \beta b' \ 0) =$

$= (\alpha a + \beta a' \ \alpha b + \beta b' \ 0) =$

$= (a'' \ b'' \ 0) \in W_0$

con $a'' = \alpha a + \beta a'$

$b'' = \alpha b + \beta b'$

$\square$

$W_3 = \{(a-b \ 2a+b \ b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$

$\alpha(a-b \ 2a+b \ b) + \beta(a'-b' \ 2a'+b' \ b')$

$= (\alpha(a-b) + \beta(a'-b') \ \alpha(2a+b) + \beta(2a'+b')$

$\alpha b + \beta b').=$

$= (a'' - b''\ \ 2a'' + b'',\ b'')$

pongo
$b'' = \alpha b + \beta b'$
$a'' = \alpha a + \beta a'$

é sottospazio vettoriale.

per quali valori di $k \in \mathbb{R}$
$W_k = \{(a\ \ b\ \ a+b+k) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.
$\leq \mathbb{R}^3$

Se W_k é sottospazio $\Rightarrow \underline{0} \in W_k$

$(0\ 0\ 0) \in W_k \iff$

$(\boxed{a}\ \boxed{b}\ a+b+k) = (\boxed{0}\ \boxed{0}\ 0)$

per qualche valore di a e b.

$\Rightarrow a = 0$
$b = 0$
$a + b + k = k = 0$

Se $k \neq 0 \Rightarrow W_h$ NON É SOTTOSPAZIO VETTORIALE.

Se $k=0 \Rightarrow W_h = \{(a \ b \ a+b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

solo per questo caso verifichiamo che W_h é chiuso rispetto le c. lineari.

risulta sottospazio.

$\rightarrow \boxed{k=0}$

~~$W_h = (a, b + (k^2-1))$~~

$\{(a \quad b+(k-1)a^2 \quad k^2-1) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

$k=+1$ é sottospazio

$k=-1$ non lo é

$k \neq 1$ non é sottospazio.

$T_6 = \{(a^2\ b^2) \mid a, b \in \mathbb{C}\}$.

$T_6 \leq \mathbb{C}^2$?

verifica che $T_6 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{C}\}$

$= \mathbb{C}^2$

$T' = \{(a^2\ b^2) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

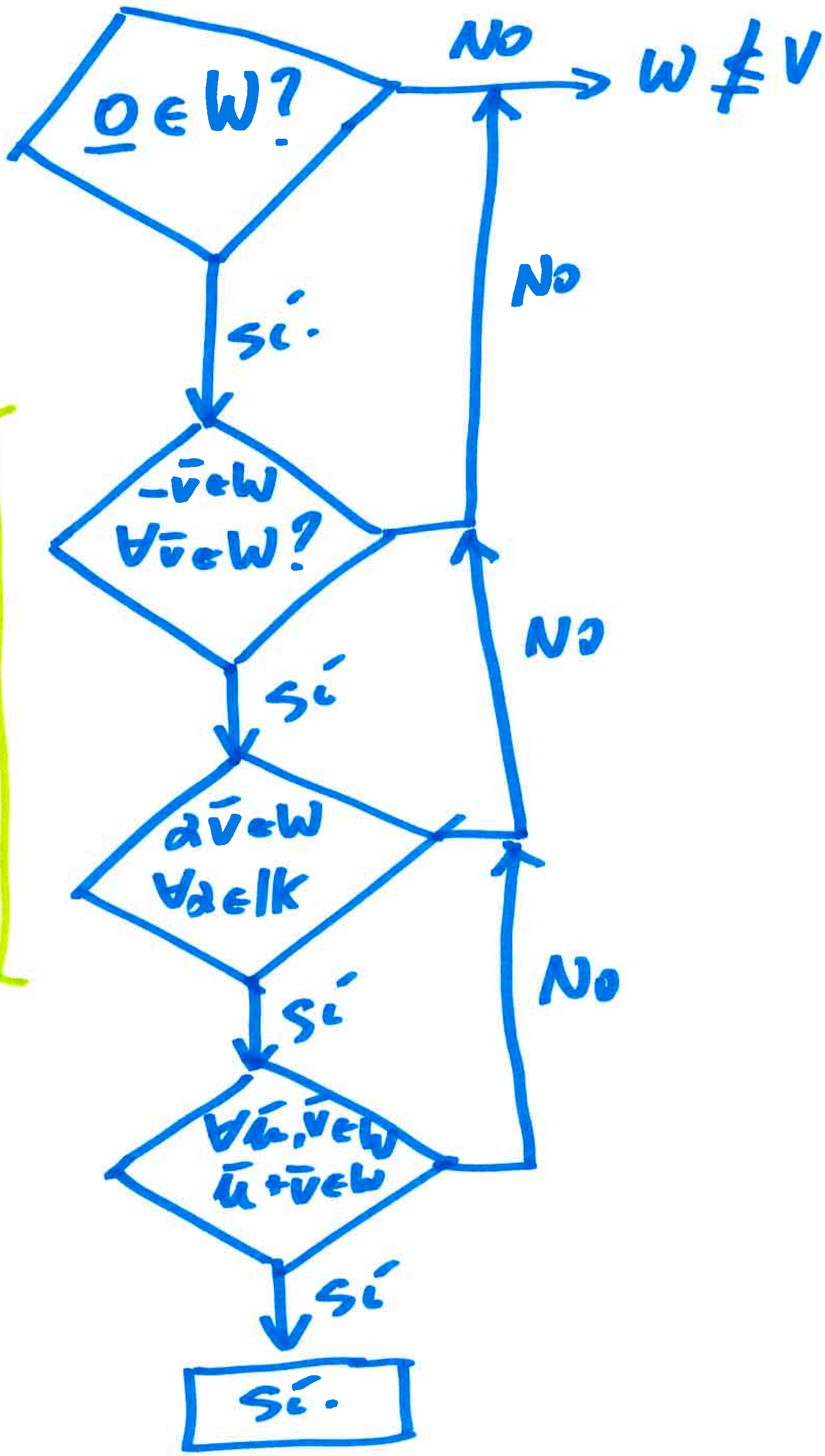
NON É S. VETTORIALE.

$-1\ (a^2\ b^2) \notin T'$

ALGORITMO

$W \subseteq V(\mathbb{K})$

SOTTOSPAZIO?



$$W_7 = \{ (a \;\; b \;\; 0) \in \mathbb{R} \mid a \cdot b = 0 \}.$$

é sottospazio vettoriale?

1) $\underline{0} \in W_7$ infatti $0.0 = 0$

2) $(a \;\; b \;\; 0) \in W_7 \Rightarrow$

$ab = 0$ considero

$(-a \;\; -b \;\; 0) = -(a \;\; b \;\; 0)$

$(-a)(-b) = ab = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -(a \;\; b \;\; 0) \in W_7$

3) $\bar{v} \in W_7 \quad (a \;\; b \;\; 0) \quad ab = 0$

e considero $\alpha \cdot \bar{v} = (\alpha a \;\; \alpha b \;\; 0)$

$\Rightarrow (\alpha a)(\alpha b) = \alpha^2 ab = 0$

$\Rightarrow \alpha \cdot \bar{v} \in W_7$

4) $(1 \; 0 \; 0), \; (0 \; 1 \; 0) \in W_7$

$(1 \; 0 \; 0) + (0 \; 1 \; 0) = (1 \; 1 \; 0) \notin W_7$

NON É SOTTOSPAZIO VETTORIALE.

Es Partiamo da $\mathbb{R}^3 = \{(a\ b\ c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$

$U = \{(a\ b\ 1) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$.

$U \subseteq \mathbb{R}^3$

Su U definisco 2 operazioni

$$\tilde{+} : \begin{cases} U \times U \longrightarrow U \\ ((a\ b\ 1),(a'\ b'\ 1)) \longrightarrow (a+a'\ \ b+b'\ \ 1) \end{cases}$$

$$\tilde{\cdot} \begin{cases} \mathbb{R} \times U \longrightarrow U \\ \alpha,(a\ b\ 1) \longrightarrow (\alpha a\ \ \alpha b\ \ 1). \end{cases}$$

- $U \subseteq \mathbb{R}^3$ sottoinsieme.
- U con le operazioni $\tilde{+}$, $\tilde{\cdot}$ è spazio vettoriale.
- U NON È SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{R}^3$!!
  $(0\ 0\ 0) \notin U$.

Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale
$\{\underline{0}\}$ e V sono sempre sottospazi
di $V(\mathbb{K})$. $\rightarrow$ sottospazi banali

pb: come costruire un sottospazio
(o più in generale uno
spazio vettoriale).

COPERTURA (chiusura) LINEARE.

Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale
ed $X \subseteq V(\mathbb{K})$ sottoinsieme
(sottosistema/sottosequenza).
Si dice copertura lineare di X

$\mathcal{L}(X)$

l'insieme di tutte le combinazioni
lineari di un numero finito

di elementi di X

$$\mathcal{L}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \;\middle|\; x_i \in X,\ \alpha_i \in \mathbb{K},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

somma di un numero finito di combinazioni lineari

Es. in $\mathbb{R}^3 = \{(a\ b\ c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

$$X = \{(1\ 0\ 1),\ (0\ 1\ 0)\}.$$

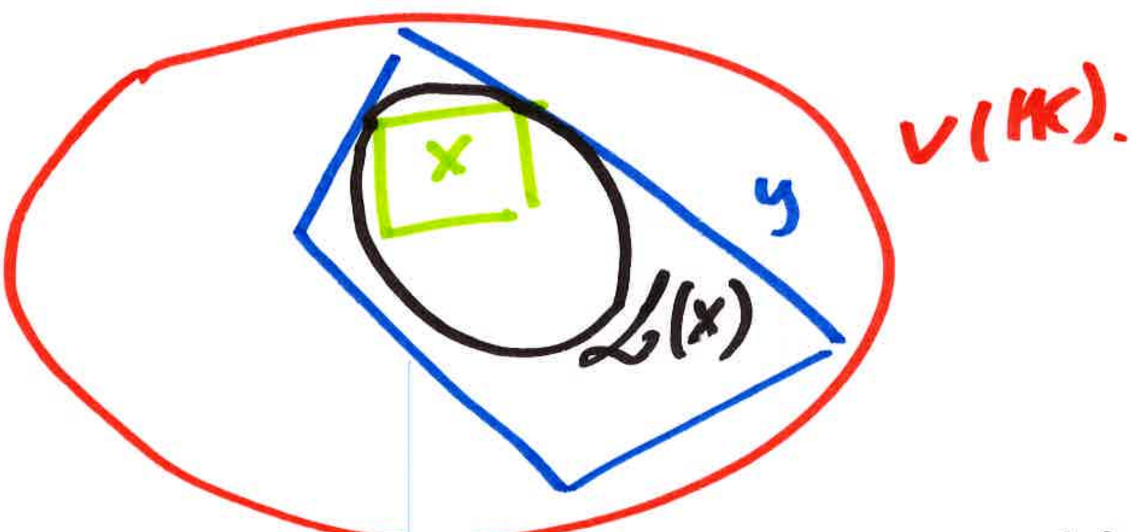
$$\mathcal{L}(X) = \{\alpha(1\ 0\ 1) + \beta(0\ 1\ 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

$$\downarrow$$

$$(\alpha\ \beta\ \alpha)$$

<u>Teorema</u>: Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $X \subseteq V(\mathbb{K})$.
Allora $\mathcal{L}(X)$ é il più piccolo sottospazio vettoriale di $V(\mathbb{K})$ che contiene X.

Cosa significa "più piccolo"?
Significa che se $Y \leq V(\mathbb{K})$ ed $X \subseteq Y \Rightarrow \mathcal{L}(X) \leq Y$.



$\rightarrow \mathcal{L}(X)$ é contenuto in tutti i sottospazi che contengono X.

1) $\mathcal{L}(X)$ è un sottospazio
2) $X \subseteq \mathcal{L}(X)$
3) Se $Y \leq V(\mathbb{K})$, $X \subseteq Y \Rightarrow \mathcal{L}(X) \subseteq Y$.

—

DIM 1) verifichiamo che $\mathcal{L}(X)$ è chiuso rispetto le c. lineari.

$x_i, x_j \in X$

$$\bar{u} = \sum_{i\in I} \alpha_i x_i \qquad \bar{v} = \sum_{j\in J} \beta_j x_j$$

$$|I| < \infty \qquad |J| < \infty.$$

$\gamma, \delta \in \mathbb{K}$.

e considero $\gamma\bar{u} + \delta\bar{v} =$

$$= \sum_{i\in I} \gamma\alpha_i x_i + \sum_{j\in J} \delta\beta_j x_j =$$

$$= \sum_{h\in I\cup J} \varepsilon_h x_h \Rightarrow \text{è comb.}$$

~~xxxxx~~ lineare di $|I\cup J| < \infty$ elementi di X

$$\sum_{i\in I} \gamma \alpha_i \bar{x}_i + \sum_{j\in J} \delta \beta_j \bar{x}_j =$$

$$= \sum_{h \in I\cup J} \varepsilon_h \bar{x}_h \quad \text{ove} \quad \begin{cases} \varepsilon_h = \gamma \alpha_h + \delta \beta_h & h \in I\cap J \\ \varepsilon_h = \gamma \alpha_h & h \in I \setminus J \\ \varepsilon_h = \delta \beta_h & h \in J \setminus I \end{cases}$$

$\Rightarrow \gamma \bar{u} + \delta \bar{v} \in \mathcal{L}(X)$

$\Rightarrow$ 5 cioé $\underline{\mathcal{L}(X) \leq V(\mathbb{K})}$.

2) $1 \cdot x_i \in \mathcal{L}(X) \quad \forall x_i \in X$

$\Rightarrow X \subseteq \mathcal{L}(X)$.

3) Supponiamo $X \subseteq Y$ e $Y \leq V(\mathbb{K})$

$\Rightarrow$ ogni combinazione lineare di un numero finito di elementi di Y é contenuta in Y $\Rightarrow$ ogni combinazione lineare di un numero finito di elementi di X é contenuta in Y $\Rightarrow \mathcal{L}(X) \subseteq Y$

$\square$

__Def__: Sia $X \subseteq V(\mathbb{K})$ si dice sottospazio vettoriale generato da X l'insieme $\mathcal{L}(X)$.

Corollario al teorema.

1) $X \subseteq \mathcal{L}(X)$

2) Se $X \leq V(\mathbb{K}) \Rightarrow \mathcal{L}(X) = X$

3) Se $\mathcal{L}(X) = X$ visto che $\mathcal{L}(X) \leq V(\mathbb{K})$ abbiamo $X \leq V(\mathbb{K})$

$\Rightarrow$ $X = \mathcal{L}(X)$ se e solamente se X é sottospazio vettoriale

4) $\mathcal{L}(\mathcal{L}(X)) = \mathcal{L}(X)$

5) $X \subseteq Y \Rightarrow \mathcal{L}(X) \leq \mathcal{L}(Y)$

$\mathcal{L}(X)$ chiusura lineare.

$\mathcal{L}(\emptyset)$ é il più piccolo sottospazio di $V(\mathbb{K})$ che ~~contiene~~ contiene $\emptyset$ $\Rightarrow$ $\{\underline{0}\}$.

$\mathcal{L}(\emptyset) = \{\underline{0}\}$.

In $\mathbb{R}^3$ $\underline{0} = (0\ 0\ 0)$

In $\mathbb{R}^{2,2}$ $\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

$\phi \subseteq \mathbb{R}^3$ $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^3}(\phi) = \{(0\,0\,0)\}$.

$\phi \subseteq \mathbb{R}^{2,2}$ $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^{2,2}}(\phi) = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.

In realtà l'operatore $\mathcal{L}(X)$ andrebbe scritto come $\mathcal{L}_V(X)$ perché dipende dallo sp. vett. di cui X è sottoinsieme e non solo da X

In $\mathbb{R}^3$ considero

$X = \{(1\,0\,0), (0\,1\,0), (0\,0\,1)\}$.

e calcolo $\mathcal{L}(X) = \{\alpha(1\,0\,0) + \beta(0\,1\,0) + \gamma(0\,0\,1) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} =$

$= \{(\alpha, \beta, \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$

$\rightarrow$ posso costruire tutti gli infiniti vettori di $\mathbb{R}^3$ a partire da $(1\ 0\ 0), (0\ 1\ 0), (0\ 0\ 1)$.

$\rightarrow X' = \{(1\ {-1}\ 0), (1\ 1\ 0), (1\ 1\ 1)\}$.

Es. $\mathcal{L}(X') = ?\ \mathbb{R}^3$

$\rightarrow X'' = \{(1\ 0\ 0)\ (2\ 1\ 0)\ (0\ 1\ 0)$
$(1\ 1\ 1)\ (0\ 1\ 2)\}$.

$\mathcal{L}(X'')$.