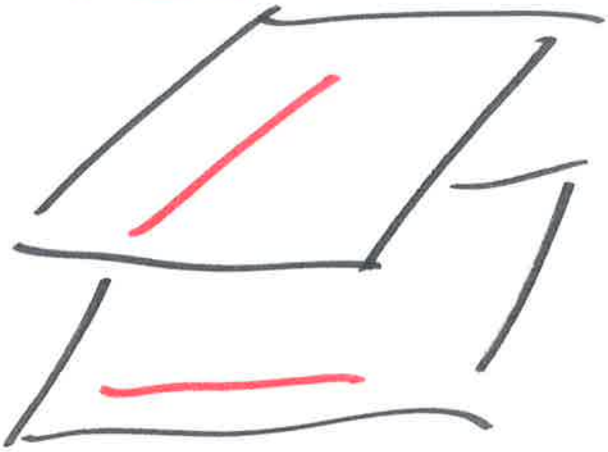
Si determinino eq. piani paralleli che contengono le rette

$$r: \boxed{x+y+1=0} = x-y-z-1$$

$$s: \boxed{x+y=0} = z-1$$



$$r: \begin{cases} x = -y-1 \\ y = y \\ z = x-y-1 = -2y-2 \end{cases}$$

$$(-1, 1, -2)$$

$$s: \begin{cases} x = -y \\ y = y \\ z = 1 \end{cases} \longrightarrow (-1, 1, 0)$$

Trovare piano per r che contenga la direzione $(-1,1,0)$.

In particolare questo piano avrà eq. $ax+by+cz+d=0$

con $(a\ b\ c)\cdot(-1\ 1\ 0)=0$

$(a\ b\ c)\cdot(1\ 1\ -2)=0$

$$a=b$$

$$-a+b-2c=0 \Rightarrow c=0$$

$$\boxed{x+y+d=0} \qquad (1\ 1\ 0)$$

$$x+y+1=0$$

$$x+y=0$$

$\square$

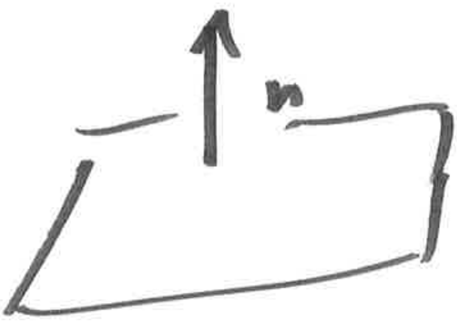
$$\alpha(x+y+1)+\beta(x-y-z-1)=0$$

$$(\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)y-\beta z+\alpha-\beta=0$$

$$rk\begin{pmatrix}\alpha+\beta & \alpha-\beta & -\beta \\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}=1$$

piano α per $P = (-1, 2, 0)$

ortogonale ad $r \begin{cases} 3x - y + 2z = 5 \\ -x + y - z = 1 \end{cases}$



$\bar{n} = (a \ b \ c)$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$(x_0 \ y_0 \ z_0) = (-1, 2 \ 0).$$

$y = y$

$$\begin{cases} 3x - y = 5 - 2z \\ -x + y = 1 + z \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x = 6 - z & x = \frac{6}{4} - \frac{1}{4} z \\ y = 1 + z + \frac{6}{4} - \frac{1}{4} z = \frac{5}{2} + \frac{3}{4} z \\ z = z \end{cases}$$

$$\left(-\frac{1}{4} \ \frac{3}{4} \ 1\right) \sim (-1 \ 3 \ 4)$$

$$-(x - 1) + 3(y - 2) + 4(z - 0) = 0$$

Coniche generali

- **Centro** $\mathcal{C} = l_\infty^{\perp e}$ polo della retta impropria.

- **Diametro** = polare di un punto improprio (= retta per il centro).

- **Asintoto** = tg. propria ad una conica in un punto improprio.

- **Fuoco** = punto proprio di intersezione delle tg. ad una conica condotte per i punti ciclici del piano J_∞, $\overline{J_\infty}$

- **Asse** = DIAMETRO DI $\mathcal{C}$ ortogonale al proprio polo

$$J_\infty = [(1, i, 0)] \qquad \overline{J_\infty} = [(1, -i, 0)]$$

Def: $\mathcal{C}$ è una circonferenza (generalizzata) <=> è una conica per J_∞ e $\overline{J_\infty}$.

Sia $\mathcal{C}$ una conica

$$[x_1\ x_2\ x_3]\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

Imponiamo $J_\infty \in \mathcal{C}$

(N.B $\Rightarrow \bar{J}_\infty \in \mathcal{C}$ perché la conica è una curva reale).

$$(1\ \ i\ \ 0)\,A\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(a_{11}+ia_{12}\quad a_{12}+ia_{22}\quad a_{13}+ia_{23})\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (a_{11}+ia_{12}) + i(a_{12}+ia_{22}) = 0$$

$$2ia_{12} + a_{11} - a_{22} = 0$$

$$\begin{cases} a_{12} = 0 \\ a_{11} = a_{22} \end{cases} \quad \text{divido per } a_{11}$$

$$x^2+y^2+2\alpha x+2\beta y+\gamma=0$$

$$(x+\alpha)^2+(y+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-\gamma$$

vedere che è il luogo dei punti a distanza al quadrato $\alpha^2+\beta^2-\gamma$ dal punto $(-\alpha,-\beta)$.

N.B. $\alpha^2+\beta^2-\gamma>0 \Rightarrow$ circ a pt. reali.

$\alpha^2+\beta^2-\gamma=0 \Rightarrow$ conica riducibile in 2 rette isotrope per $(-\alpha-\beta)$.

$\alpha^2+\beta^2-\gamma<0 \Rightarrow$ conica priva di punti reali.

$x^2+y^2=-1$

<u>ASSE</u> = DIAMETRO DI UNA CONICA ORTOGONALE AL PROPRIO POLO (rispetto il prod. euclideo).

- Sia $\mathcal{C}$ una parabola.
  Allora il centro di $\mathcal{C}$ è un punto improprio perché la parabola è tg. la retta impropria ($\Rightarrow$ la interseca in P_∞ due volte) e quindi il polo rispetto ad essa della retta impropria è esattamente P_∞.

$\rightarrow$ In particolare il fascio dei diametri di $\mathcal{C}$ è un fascio improprio (tutte rette per P_∞)
$\rightarrow$ sono tutte rette parallele.

Sia dunque a un asse di $\mathcal{C}$.

$\Rightarrow$ il polo di a deve essere il punto improprio A che è ortogonale alla direzione di a; ma la direzione di a è proprio P_∞

$\Rightarrow$ di asse ce ne è uno solo ed è $\underbrace{(P_\infty^{\perp})^{\perp e}}_{\text{polari della direzione ortogonale a } P_\infty}$

$${}^tX \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} X = 0 \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

$x_3 = 0$

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad x_1 = -\frac{b}{2}$$

$$\Delta = \cancel{a_{11}} \; a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

$$P_\infty = \left[\left(-\frac{a_{12}}{a_{11}}, 1, 0\right)\right]$$

$P_\infty = [(-a_{12} \; a_{11} \; 0)]$

si calcola $P_\infty^\perp = [(a_{11} \; a_{12} \; 0)]$

e poi la sua polare.

CONICHE "A CENTRO" → con centro propria. < ellissi / iperboli

equazione degli assi.

$\mathscr{C}$ conica C il suo centro.

C = polo della retta impropria.

$$\begin{cases} [(1\,0\,0)] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \\ [(0\,1\,0)] \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \\ \vdots & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases}$$

coord. del centro.

equazione del fascio dei diametri

$$\alpha(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + \beta(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) = 0$$

In particolare raccogliendo

$$(\alpha a_{11} + \beta a_{12})x_1 + (\alpha a_{12} + \beta a_{22})x_2 + (\alpha a_{13} + \beta a_{23})x_3 = 0.$$

$\downarrow$

<u>N.B</u>: questo é anche l'equazione della polare del punto improprio $[(\alpha, \beta, 0)]$ ed é una retta di direzione che corrisponde al pto improprio $[(\alpha a_{12} + \beta a_{22}) \; -(\alpha a_{11} + \beta a_{12}) \; 0]$

per imporre che la polare sia $\perp$ al proprio polo dobbiamo dire

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} \boxed{\alpha a_{11}+\beta a_{12} \quad \alpha a_{12}+\beta a_{22}} \\ \boxed{\alpha \quad\quad \beta} \end{pmatrix} = 1$$

direzione che corrisponde al polo

direzione ortogonale alla polare = coeff. dell'equazione.

$$\alpha\beta a_{11} + \beta^2 a_{12} - \alpha^2 a_{12} - \alpha\beta a_{22} = 0$$

$$\alpha^2 a_{12} + \alpha\beta(a_{22} - a_{11}) - \beta^2 a_{12} = 0.$$

se $a_{12} = 0$ & $a_{22} = a_{11}$ $\Rightarrow$

l'equazione è sempre verificata. ↓

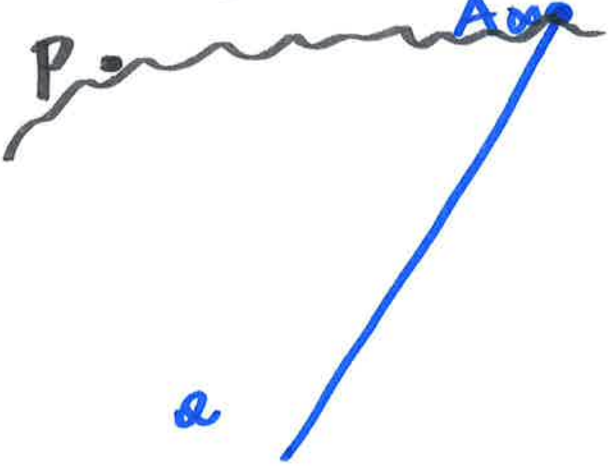
se $\mathcal{C}$ è una circonferenza (generalizzata) $\Rightarrow$ OGNI DIAMETRO É UN ASSE.

ALTRIMENTI → eq. omogenea di II grado in α e β con $\Delta \neq 0$ (non abbiamo una parabola).
⇒ ∃ due assi. (esattamente).

proposizione: se esistono esattamente 2 assi per $\mathcal{C}$ ⇒ questi assi sono ⊥ fra loro.

DIM: (1) → verificare che le soluzioni dell'eq. danno 2 rette ⊥.

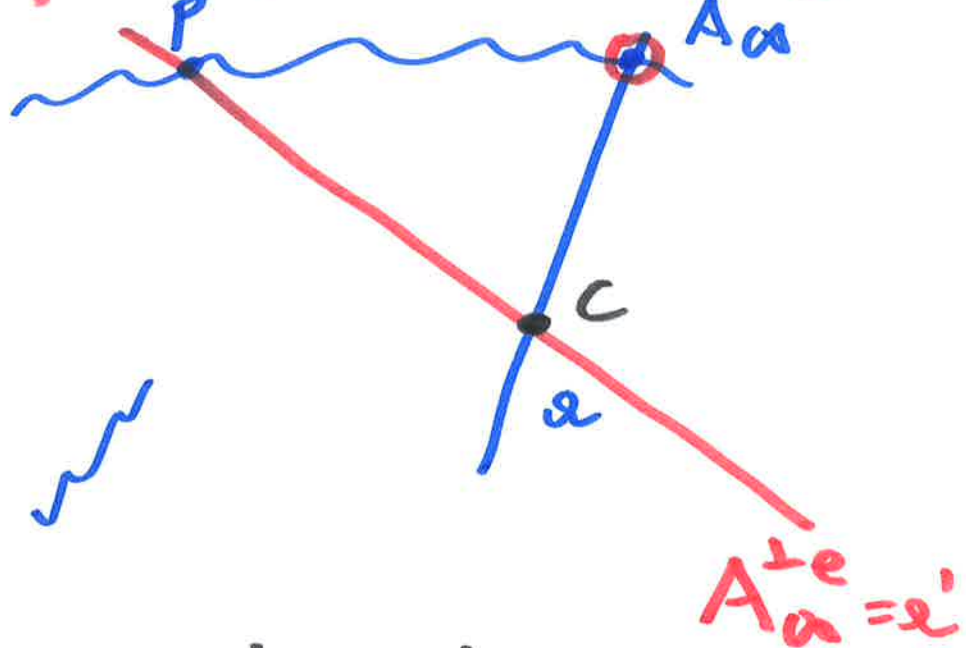
(2) → geometricamente



Sia a un asse di punto improprio A_∞ e polo P.

allora $P \perp A_\infty$ per definizione di asse. Consideriamo la polare di A_∞ → poiché $a \in P^{\perp_{\mathcal{C}}}$

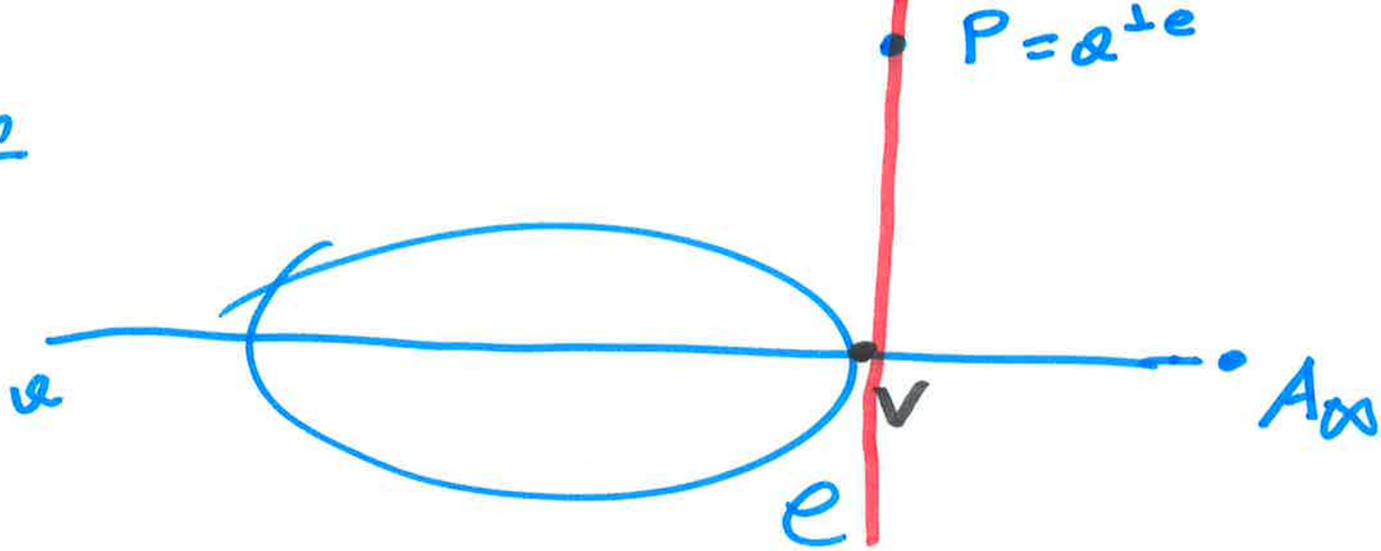
abbiamo che $A_\infty^{\perp e}$ deve passare per P ma allora la polare di A_∞ è un asse perché ha direzione P che è ortogonale al proprio polo A_∞ $\square$



Def: Si dice vertice di una conica è ogni sua intersezione propria con un suo asse.

OSS: le tangenti in un vertice ad una conica sono ortogonali all'asse per quel vertice.

DIM



la tg in V alla conica è
la polare di un punto di a
$\Rightarrow$ passa per il polo di a
che è P ed è ortogonale ad A_∞
$\square$

Forme canoniche per le coniche
generali.
↓
In $\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$ scegliere un riferimento
opportuno che renda le eq. rispetto
ad esso le più semplici possibili.
↘ rende più facile ragionare
sugli enti geometrici.

$\mathcal{C}$ conica a centro.

$$\Gamma = (O, \mathcal{B} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2)).$$

con $v_1 \perp v_2$ (riferimento euclideo).

$O = C$ centro della conica.

$\bar{v}_1, \bar{v}_2$ versori che hanno la direzione degli assi della conica se $\mathcal{C} \neq$ circonferenza.

Se $\mathcal{C}$ circonferenza $\Rightarrow \bar{v}_1, \bar{v}_2$ due qualsiasi vettori ortogonali.

→ per una circonferenza. se centro $= (0,0) \Rightarrow$ eq. è del tipo $x^2 + y^2 = \alpha$

→ per una conica a centro generale. → gli assi devono essere le rette $x = 0$ e $y = 0$

→ l'eq. che otteniamo imponendo questa condizione è

$$a_{12}=0 \qquad a_{13}=0 \qquad a_{23}=0$$

si ricava dall'eq. del fascio degli assi che deve essere

$$\alpha x+\beta y=0$$

+ la condizione di ortogonalità.

$$\boxed{a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}=0}$$

con $a_{11}a_{22}>0$ se ellisse

$a_{11}a_{22}<0$ se iperbole.

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \qquad \boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1}$$

ellissi

↓ punti reali

↓ priva di punti reali.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{oppure} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

iperboli.

per le parabole
- il centro è un pto improprio
- c'è un solo asse.

costruiamo il riferimento prendendo come origine il vertice della parabola e come base versori che hanno la direzione dell'asse e la direzione della tg. nel vertice.

$$\boxed{y = a x^2}$$

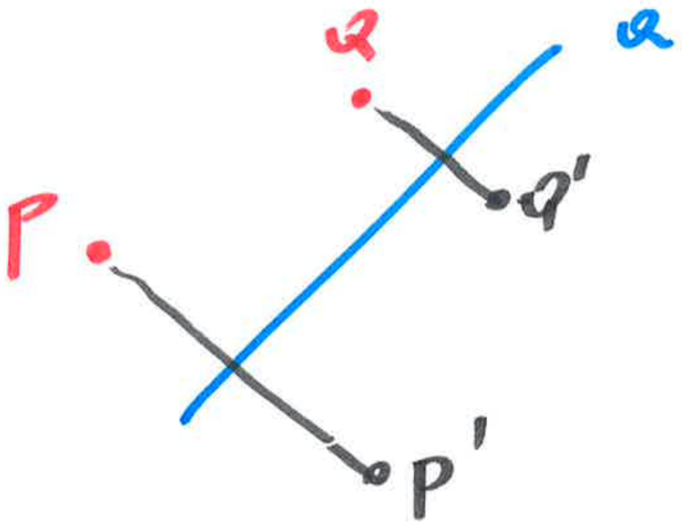
oppure

$$\boxed{x = a y^2}$$

(la parabola ha asse che passa per $(0,0)$ ed è $y=0$ o $x=0$ e la tg in $(0,0)$ alla parabola è la retta ort. ~~uguale~~ all'asse stesso).

DIRETTRICE = polare di un fuoco

In $\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$ si dice simmetria di asse a una funzione
$$\begin{cases} \mathcal{E}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{E}_2(\mathbb{R}) \\ P \longrightarrow P' \end{cases}$$
con P' punto tale che a sia l'asse del segmento PP'.



Teorema: Sia $\mathcal{C}$ una conica generale, a un suo asse e σ_a la simmetria di asse a

$\Rightarrow v(e) = e.$

DIM: Sia e un'ellisse.

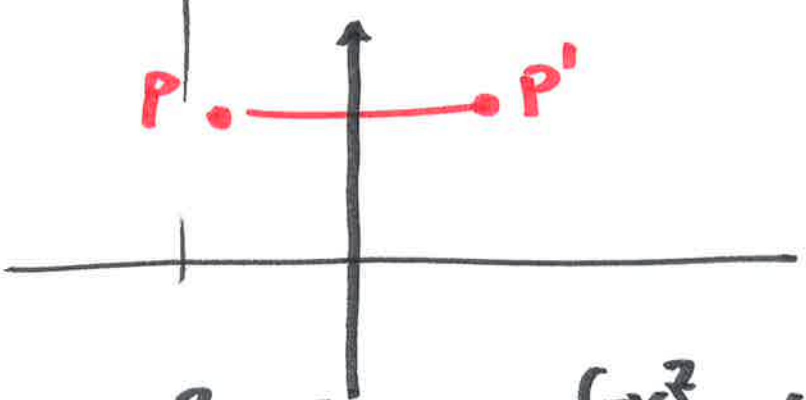
possiamo scegliere un rif. tale che l'eq. di e sia

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e che l'asse rispetto cui v è simmetria sia proprio la retta $x = 0$.

$\Rightarrow$ $\cancel{v((x,y)) = (x,-y)}$

$$v(x,y) = (-x, y)$$



$\Rightarrow$ ci manda $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ in $\frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

che è la medesima eq. $\square$