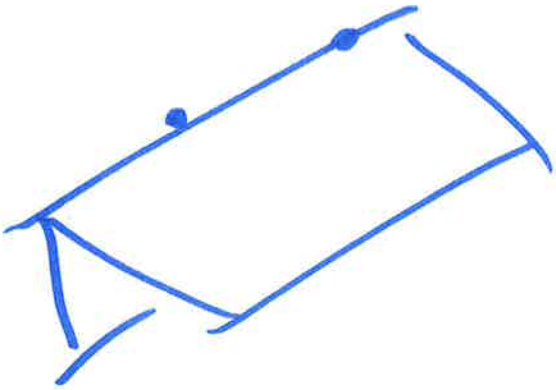
II intermedio 2020-21.

A) 

P, Q dati:
retta per P e Q
è la retta
$$\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

fascio di piani $\alpha y + \beta z = 0$
$(\alpha, \beta) \neq (0\ 0)$.

B) già visto.

C) $\pi: x - y - z = 2$
$\pi': x - y - z = 4$

rette sghembe.

$$r: \begin{cases} \pi \\ x=0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} \pi' \\ y=0 \end{cases}$$

D) $\Pi = (0, (e_1, 2e_2))$
$r: 2x - 3y + 4 = 0 \qquad 2x - 3y = 0$

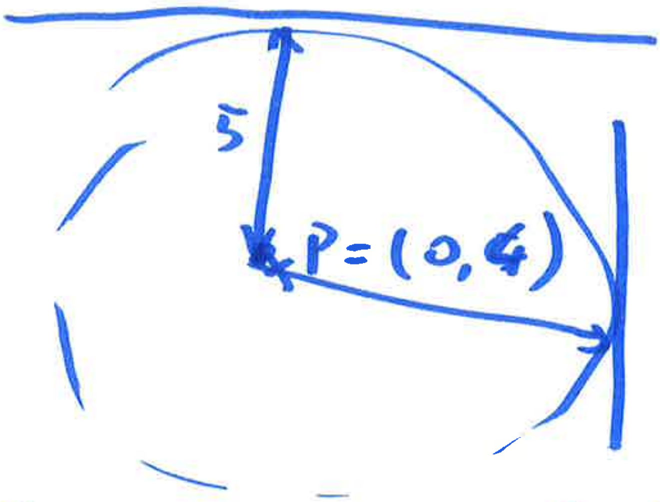
dir. è generata dal vettore

di componenti $(3,2)$ $\Rightarrow$

dal vettore $3\cdot\bar{e}_1 + 2\cdot(2\bar{e}_2) = \underline{3\bar{e}_1 + 4\bar{e}_2}$

base.

E)



le rette date sono tutte e sole le rette tg. alla circonferenza di centro P e raggio 5.

in particolare il luogo delle proiezioni ort. di P su queste rette è proprio tale circ.

$\Rightarrow$ $(x-0)^2+(y-4)^2=5^2$.

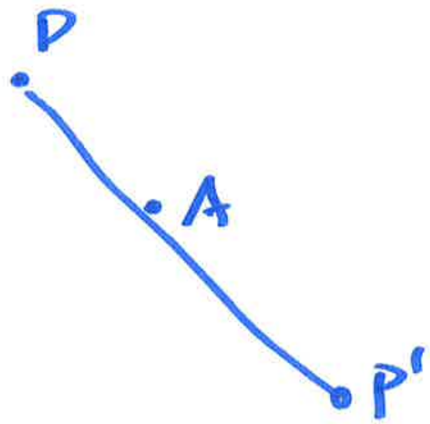
$ax+by+c=0$

con $$\frac{|a\cdot 0+4b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=5$$

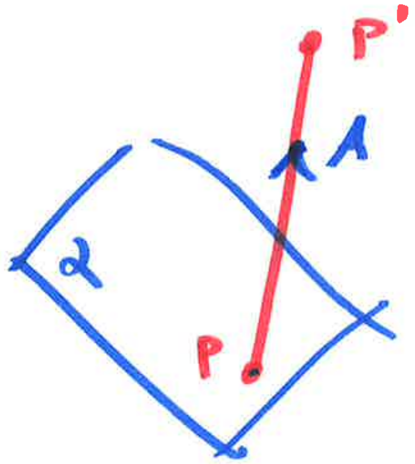
e da questo si ricavano
a, e b.

<u>oss</u>: la proiezione H di P sulla retta a dist. 5 da P deve essere essa stessa a dist. 5 dal punto $\Rightarrow$ H appartiene alla circonferenza di raggio 5 e centro P (e le rette sono quelle tg. in H).

ES. 2.



P' è detto simmetrico rispetto ad A di P se A è il punto medio di PP'.



$$(x,y,z) \to (x,y,z) + 2\left[(0,-1,2) - (x\,y\,z)\right]$$

$$\to (0,-2,4) - (x,y,z).$$

$\alpha: \ x - 3y + z - 5 = 0$

$x - 3y + z = 0$

$\mathcal{L}((3,1,0),(1,0,-1)).$

$\downarrow$

$(\bar{e}_1 - \bar{e}_3), (3\bar{e}_1 + \bar{e}_2)$

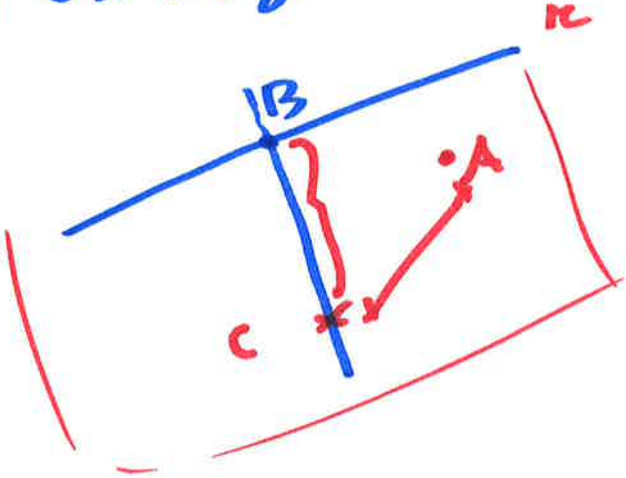
ES. 4 : $\forall$ piano complesso contiene una retta reale $\pi \cap \bar{\pi}$.

$$r_c: \begin{cases} ix + (3i-3)y - z = i \\ -ix + (-3i-3)y - z = -i \end{cases}$$

$$\downarrow$$

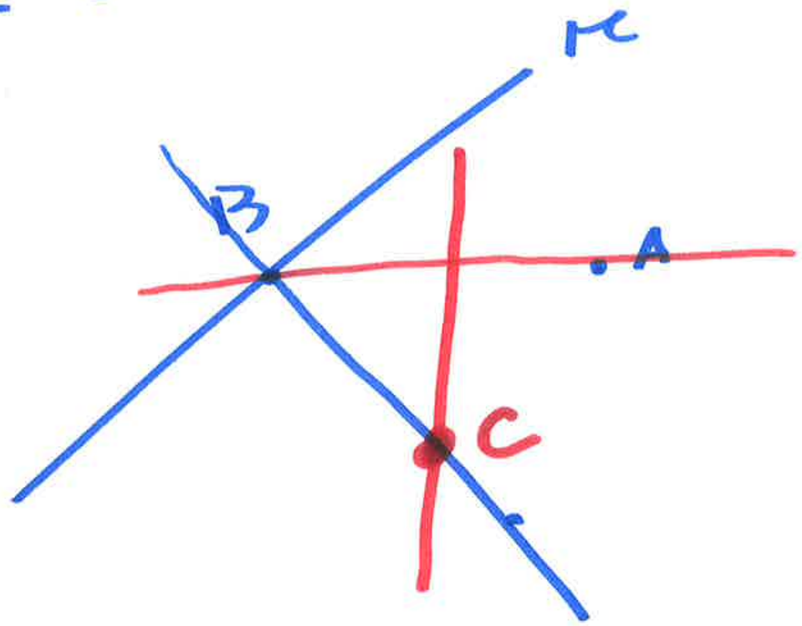
$$\begin{cases} -6y - 2z = 0 \\ 2x + 6y = 2 \end{cases}$$

ES. 5.



A, r

ES. 5.



la circonferenza deve avere centro

nel piano che contiene A ed r.

nel piano per B ortogonale ad r

nel piano assiale fra A e B

visto che il centro è equidistante

fra A e B.

C è intersezione di questi 3

piani.

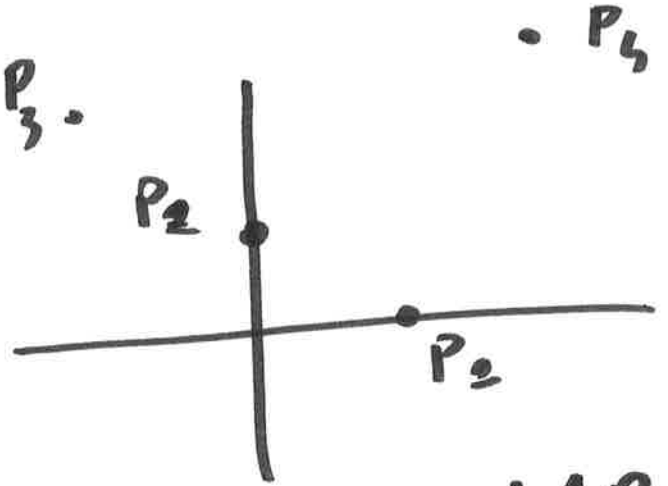
B) $(x-y+z)^2=0$

Una conica con almeno 2 pti doppi è una retta contata 2 volte.

$\downarrow$

eq. = quadrato dell'eq. di una retta.

E) si osserva che ci sono 3 punti allineati:



$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Quindi ~~si~~ si ha una conica che contiene una retta.

ne segue che l'insieme di ∀ le coniche date è un insieme di coniche riducibili nell'unione della retta r_0 per P_1, P_2, P_3 + una generica retta del fascio di centro P_4.

$$\frac{x-1}{0-1} = \frac{y-0}{1-0}$$

$$\boxed{y = 1 - x}$$

$$\alpha(x-5) + \beta(y-5) = 0$$

la generica conica ha eq.

$$(y+x-1)\cdot(\alpha(x-5)+\beta(y-5)) = 0$$

□

Coniche.

eq. II grado omogenea in $x_1\ x_2\ x_3$

$$F(x_1\ x_2\ x_3) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2.$$

se pongo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

matrice simmetrica associata alla conica

$\downarrow$

A definisce un prodotto scalare in $\widetilde{A_2(\mathbb{R})}$ e i punti della conica sono esattamente i punti isotropi per tale prod. scalare. Cioè ${}^tX = (x_1\ x_2\ x_3)$ tali che

$$\boxed{{}^tXAX = 0}$$

Due punti P, Q sono detti coniugati rispetto una conica $\mathcal{C}$ se $P \perp_{\mathcal{C}} Q$ rispetto il prodotto scalare definito da A.

$$P = {}^t(x_1\ x_2\ x_3) \qquad Q = {}^t(y_1\ y_2\ y_3)$$

$$\Rightarrow \quad P \perp_e Q \iff {}^tPAQ = 0$$

In particolare $P \in \mathcal{C} \iff {}^tPAP = 0$

$\iff P \perp_e P$ cioè P è

autoconiugato.

proposizione: $P = {}^t(x_1\ x_2\ x_3)$ è un punto doppio per $\mathcal{C} \iff$

$AP = \underline{0}$ cioè ${}^t(x_1,\ x_2\ x_3) \in \operatorname{Ker} A$.

DIM:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + 2a_{13}x_3$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 2a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2 + 2a_{23}x_3$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3} = 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + 2a_{33}x_3$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ le tre quantità sono $=0$

$\Leftrightarrow$ $2A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underline{0}$ cioè $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underline{0}$

ed in questo caso anche

$$(x_1\ x_2\ x_3)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 .$$

Ne segue che i punti di $\mathcal{C}$ che sono doppi sono tutti e soli i punti di $PG(2, \mathbb{K})$ tali che $AP = \underline{0}$. $\square$

punti doppi della conica di eq. $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 0$

$$\overset{\parallel}{(x_1 - x_2)^2}$$

ogni punto della retta di eq.

$(x_1 - x_2) = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \ker A = \mathcal{L}\left({}^t(1\,1\,0),\ {}^t(0\,0\,1)\right).$$

e questo sottospazio corrisponde esattamente alla retta per $(0,0)$ di direzione $(1\ 1)$ cioè alla retta $x-y=0$ $\square$

Def: Una conica è detta <u>singolare</u> se ha almeno un punto doppio; <u>generale</u> altrimenti.
È anche detta <u>riducibile</u> se la sua eq. si fattorizza nel prodotto di 2 eq. di grado inferiore; <u>irriducibile</u> altrimenti.

CONICA: GENERALE $\Leftrightarrow$ IRRIDUCIBILE $\Leftrightarrow$ $\det(A)\neq 0$

[SINGOLARE $\Leftrightarrow$ RIDUCIBILE (in 2 rette). $\Rightarrow$ $\det(A)=0$

CLASSIFICAZIONE I:

$\mathcal{C}$ conica
- $\det(A) \neq 0$ GENERALE
- $\det(A) = 0$ SINGOLARE
  $\Downarrow$
  RIDUCIBILE.

$\mathcal{C}$ RIDUCIBILE
- $rk(A) = 2 \rightarrow \exists!$ punto doppio
  - 2 rette reali e $\neq$.
  - (*) • 2 rette imm. conj.
- $rk(A) = 1 \rightarrow \infty^1$ pti doppi
  $\rightarrow$ la conica si riduce in una retta reale contata 2 volte.

se $\mathcal{C}$ si riduce in 2 rette immaginarie
$\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ deve ridursi in 2 rette imm. conj
in quanto l'eq. di $\mathcal{C}$ è data da

$$F(x_1 x_2 x_3) = G(x_1 x_2 x_3) H(x_1 x_2 x_3)$$

con $F(x_1\ x_2\ x_3)$ polinomio a coeff. reali $\Rightarrow$ $F(x_1\ x_2\ x_3) = \overline{F}(x_1\ x_2\ x_3)$

$$\Rightarrow \quad G(x_1\ x_2\ x_3) \cdot H(x_1\ x_2\ x_3) =$$
$$= \overline{G}(x_1\ x_2\ x_3)\ \overline{H}(x_1\ x_2\ x_3).$$

e dunque o $G = \overline{G}$ e $H = \overline{H}$ ($\Rightarrow$ le rette sono reali) o

$$G = \overline{H} \text{ ed } H = \overline{G}$$

($\Rightarrow$ le rette sono imm. e coniug.).

N.B: Una conica riducibile in 2 rette imm. e coniugate ha un unico punto reale.

Es.

$$(x^2+y^2)=0$$
$$(x+iy)(x-iy)=0$$

e l'unico pto reale è $(0,0)$.

$$(x+3iy-2)(x-3iy-2)=0$$

$P=(2,0)$.

N.B. II: Ci sono anche coniche prive di punti reali

Es. $x^2+y^2+1=0$

(N.B. questa non è una conica riducibile).

OSS: Se una conica $\mathcal{C}$ contiene 3 punti allineati $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ è riducibile e la retta per quei 3 punti è una sua componente.

(segue dal teorema dell'ordine).

Coniche generali

Si classificano in termini della loro intersezione con la retta impropria.

- **Ellissi** se $\mathcal{C} \cap l_\infty$ sono 2 punti imm. e coniugati
- **Parabole** se $\mathcal{C} \cap l_\infty$ è un punto contato 2 volte.
- **Iperboli** se $\mathcal{C} \cap l_\infty$ sono 2 pti reali e distinti.

si studia la matrice della conica.

$$\begin{cases} {}^t X A X = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x_1\ x_2) \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}^{A^*} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

studiamo le sol. del sistema

$$\begin{cases} a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

→ risolviamo l'eq. di II grado

$$\frac{\Delta}{4} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -\det(A^*).$$

Se $\frac{\Delta}{4} < 0$ cioè $\det(A^*) > 0$

⇒ NON CI SONO SOLUZIONI REALI

⇒ la conica è una ellisse.

Se $\frac{\Delta}{4} = 0$ cioè $\det(A^*) = 0$ ⇒

⇒ C'È UNA UNICA SOLUZIONE CONTATA DUE VOLTE ⇒

la conica è una parabola.

Se $\frac{\Delta}{4} > 0$ cioè $\det(A^*) < 0$ ⇒

⇒ ci sono 2 soluzioni reali e distinte ⇒ la conica è una iperbole.

polarità indotta da una conica generale.

Def: Sia $\mathcal{C}$ una conica generale di matrice A e $P \in PG(2, \mathbb{K})$.
Si dice polare di P la retta p di $PG(2, \mathbb{K})$ data da $p = P^{\perp_{\mathcal{C}}}$

La retta polare di P è il luogo di tutti i punti coniugati a P.

N.B $P \in p \iff P \in P^{\perp_{\mathcal{C}}} \iff P \in \mathcal{C}$.

per le proprietà dei prodotti scalari, se r è una retta di $PG(2, \mathbb{K}) \Rightarrow r^{\perp_{\mathcal{C}}} = R$ è un punto di $PG(2, \mathbb{K})$ detto polo di r.

La relazione $\perp_{\mathcal{C}}$ scambia punti e rette del piano.

<u>Def</u>: Sia $\mathcal{C}$ una conica generale e $P \in \mathcal{C}$. Si dice che una retta per P è <u>tangente</u> a $\mathcal{C}$ se essa interseca $\mathcal{C}$ in P 2 volte.

Cerchiamo l'equazione della retta tg ad una conica in un suo punto e vediamo che legame ha con la polarità.

(spoiler: la polare di un punto $P \in \mathcal{C}$ è proprio la retta tangente a $\mathcal{C}$ in P).

Siano P e Q due punti di coordinate omogenee

$$X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \quad e \quad X'' = \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix}.$$

consideriamo la retta per P e Q

ed intersechiamola con la conica di eq. ${}^tXAX=0$

$$ {}^t(\alpha X'+\beta X'')A(\alpha X'+\beta X'')=0 $$

$(\alpha,\beta)\neq(0\ 0)$.

$$ (*)\quad \alpha^2\,{}^tX'AX'+2\alpha\beta\,{}^tX'AX''+\beta^2\,{}^tX''AX''=0 $$

voglio imporre che la retta sia t_P

$\Rightarrow \frac{\Delta}{4}=0$ di $(*)$.

$$ (\alpha\beta)^2({}^tX'AX'')^2-\alpha^2\beta^2({}^tX'AX')({}^tX''AX'')=0 $$

supponiamo che sia $P\in\mathcal{C}\Rightarrow$

${}^tX'AX'=0 \Rightarrow$ l'equazione diventa (dividendo anche per $(\alpha\beta)^2$)

$$ ({}^tX'AX'')^2=0 $$

cioè ${}^tX' A X'' = 0$ ovvero che

$Q \in P^{\perp_e}$

Se $P \in \mathcal{C}$, la polare di P è proprio la retta tg a $\mathcal{C}$ in P

<u>Es.</u>

$$\cancel{x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_3^2 = 0}$$

$$\cancel{A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

~~[illegible]~~

$\cancel{(-1, 1, 1)}$

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$$

$$(1, 0, 1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

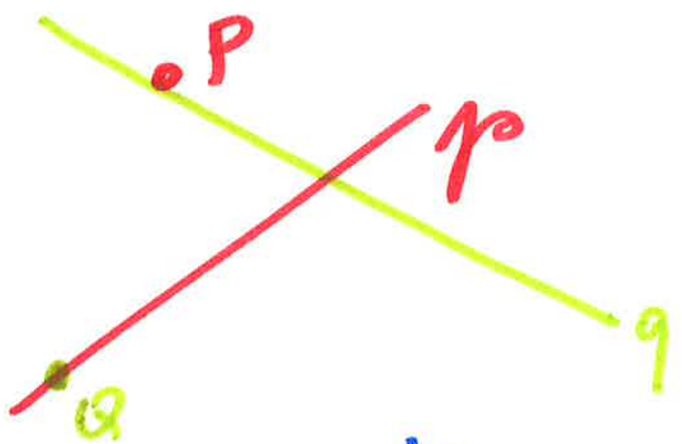
$$x_1 - x_3 = 0 \rightarrow x_1 = x_3$$

Sia $\mathcal{C}$ una conica e $P \notin \mathcal{C}$ un punto di $PG(2,\mathbb{K})$.

Allora cosa è la polare di P?

principio di reciprocità: Sia P un punto e $p = P^{\perp_{\mathcal{C}}}$ la sua retta polare. Allora

- i poli delle rette passanti per P appartengono a p.
- le polari dei punti di p passano per P



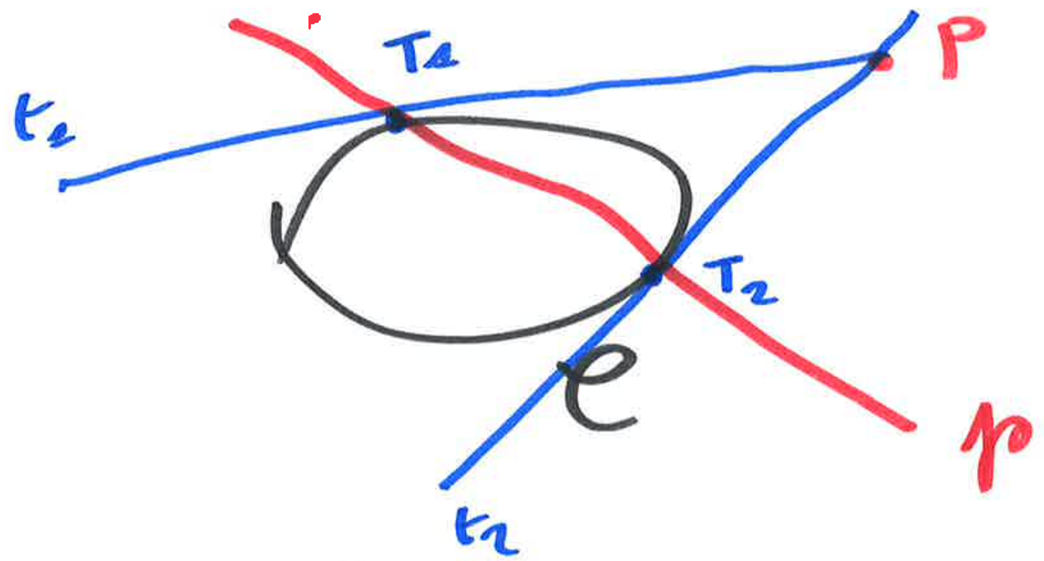
DIM: Sia $Q \in p \Rightarrow Q \in P^{\perp_{\mathcal{C}}} \Rightarrow P \in Q^{\perp_{\mathcal{C}}}$ in quanto

$P = P^{\perp_e \perp_e}$ $\Rightarrow$ la polare di $Q \in p$ passa per P.

Viceversa: se q è una retta con $P \in q$ $\Rightarrow q^{\perp_e} \in P^{\perp_e} \Rightarrow Q$ polo di q appartiene a $p = P^{\perp_e}$ $\square$

Sia $P \in PG(2, \mathbb{K})$, $P \notin \mathcal{C}$.

Allora la retta $P^{\perp_e} = p$ polare di P è la retta che congiunge i 2 punti di tangenza delle tangenti a $\mathcal{C}$ passanti per P.



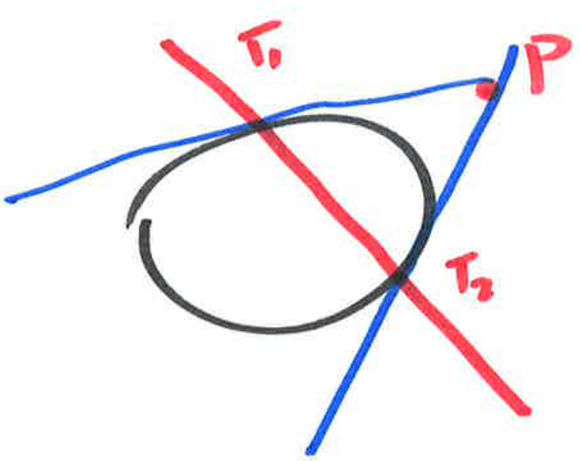
DIM: Siano t_1, t_2 le 2 tg. a $\mathcal{C}$ per P e T_1, T_2 i rispettivi pti di tangenza.

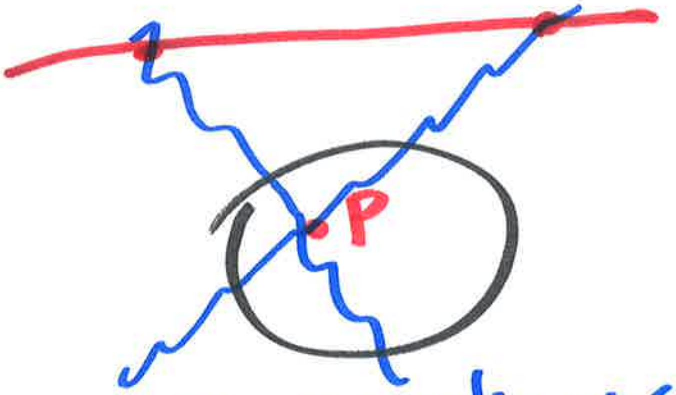
Allora $P \in t_1 \cap t_2$ cioè

$P \in T_1^{\perp_{\mathcal{C}}} \cap T_2^{\perp_{\mathcal{C}}}$ perché le tangenti in $\cancel{T_1}$ e $\cancel{T_2}$ sono proprio le polari di T_1 e T_2.

$\Rightarrow T_1 \in P^{\perp_{\mathcal{C}}}$ e $T_2 \in P^{\perp_{\mathcal{C}}}$.

Quindi $P^{\perp_{\mathcal{C}}}$ è proprio la retta per T_1 e per T_2 $\square$





in questo caso le tg. per P alla conica sono 2 rette imm. e coniugate

intersecano $\mathcal{C}$ in 2 punti imm. coniug

⇒ la retta che congiunge questi 2 punti è ancora la polare di P ed è una retta reale.

Def: Si dice <u>circonferenza</u> una ellisse che passa per i 2 punti ciclici del piano $J_\infty = [(1, i, 0)]$ e $\bar{J}_\infty$

↓

Si dice <u>asintoto</u> di una conica $\mathcal{C}$ una tangente propria a $\mathcal{C}$ in un punto improprio

[le iperboli hanno 2 asintoti reali e distinti, le ellissi hanno 2 asintoti immaginari e coniugati].

Si dice <u>centro</u> di una conica il polo della retta impropria rispetto ad essa.

Una conica è detta <u>a centro</u> se il no centro è un punto proprio

→ coniche a centro: ellissi
iperboli.

<u>OSS</u>: Sia $\mathcal{C}$ una circonferenza.
Allora i punti di $\mathcal{C}$ hanno tutti la medesima distanza euclidea dal centro di $\mathcal{C}$; gli asintoti di $\mathcal{C}$ sono 2 rette isotrope per il centro; per ogni punto P di $\mathcal{C}$, la tg a $\mathcal{C}$ in P è ortogonale alla retta che congiunge il centro di $\mathcal{C}$ con P.

<u>Def</u>: Si dice <u>diametro</u> di una conica $\mathcal{C}$ la polare di un suo punto improprio. Se $\mathcal{C}$ è una conica a centro ⇒ i suoi diametri sono tutte e sole le rette del fascio proprio per il centro di $\mathcal{C}$.

$\widetilde{E_2(\mathbb{C})}$

$\mathcal{C}: \underline{2x^2 - xy - 2x + 1 = 0}$

riconoscere + polo di

$r: 3x - 2y - 4 = 0$

N.B. Lavorare in coord. omogenee!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det A \neq 0$

$\to$ conica generale.

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$\det A^* = -\frac{1}{4} < 0$

iperbole.

in quanto ha 2 punti all'infinito reali e distinti.

r = retta per $[(0,-2,1)] = P$

$[(\frac{4}{3},0,1)] = Q.$

$P^\perp \cap Q^\perp = \ldots$

$$(0 \quad -2 \quad 1)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(\tfrac{4}{9} \quad 0 \quad 1\right) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} (0 \quad 0 \quad 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \\ \left(-\frac{5}{9} \quad -\frac{2}{9} \quad \frac{5}{9}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\cancel{x_3 = -2x_2} \qquad \begin{cases} x_3 = 0 \\ -5x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$P_\infty = [(2, -5, 0)]$$

polo (a meno di errori di calcolo).

N.B. P_∞ è un punto improprio $\Rightarrow$ la retta è diametro.

Iperbole per $(2,3)$

$(x-2)(y-3)=4$ → diversa da 0

iperbole con asintoti paralleli alle rette

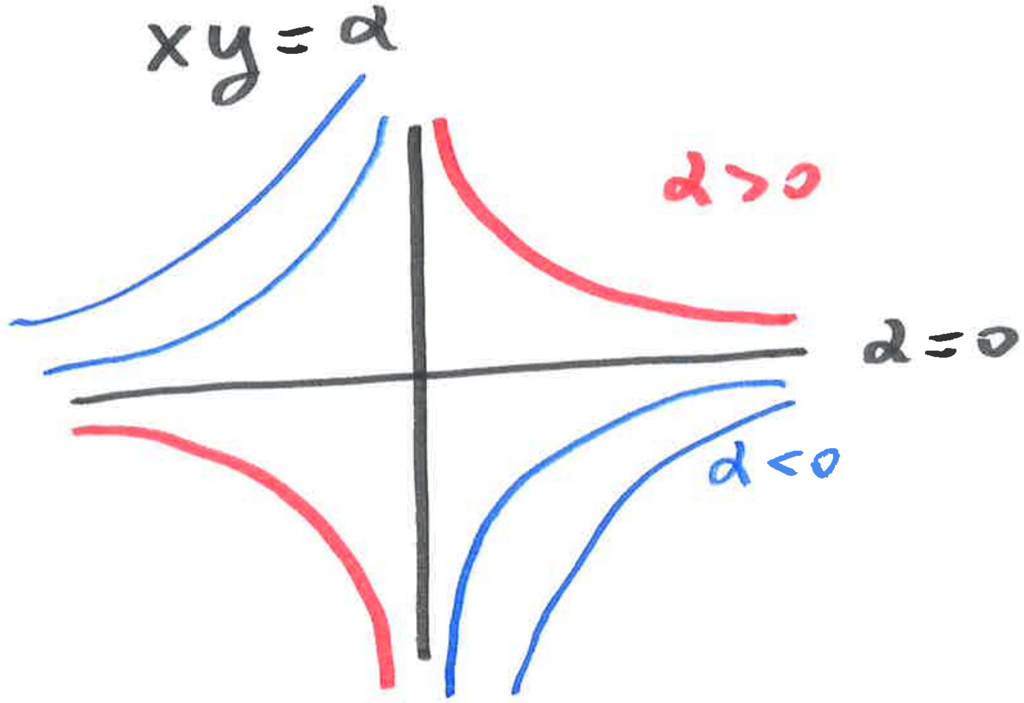
$y-2x+5=0 \qquad 3x+7y-24=0$

$xy-2xy-3x-4=0$

$$\det\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -1 & -4 \end{bmatrix} \neq 0$$

$(y-2x)(3x+7y)=1$

$(y-2x+5)(3x+7y-24)=1$



se $\alpha\neq 0$ la curva non é unione di 2 rette $\Rightarrow$ non é una conica riducibile

$\rightarrow$ Una conica per $(-i,1)$.

<u>OSS</u>: Se $P=(-i,1)\in \mathcal{C} \Rightarrow$
$\bar{P}=(i,1)\in \mathcal{C}$ perché $\mathcal{C}$ curva <u>reale</u>.

Ad esempio la retta $y=1$ passa sia per P che $\bar{P}$ $\Rightarrow$ $(y-1)^2=0$ é eq. di una conica che passa per P.

considero una eq. di II grado a coeff. reali che ammetta $(-i, 1)$ oppure $(i, 1)$ come soluzione.

$$x^2+y^2=0$$

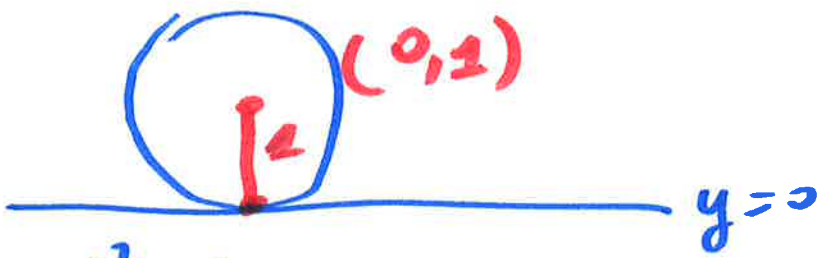
(questa è una conica riducibile in 2 rette imm. coniugate $\Rightarrow$ 1 punto doppio).

$$\overset{=0}{x^2+y^2}+2y-2=0$$

in questo caso è anche irriducibile.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \det A \neq 0.$$

Conica tg. $y=0$



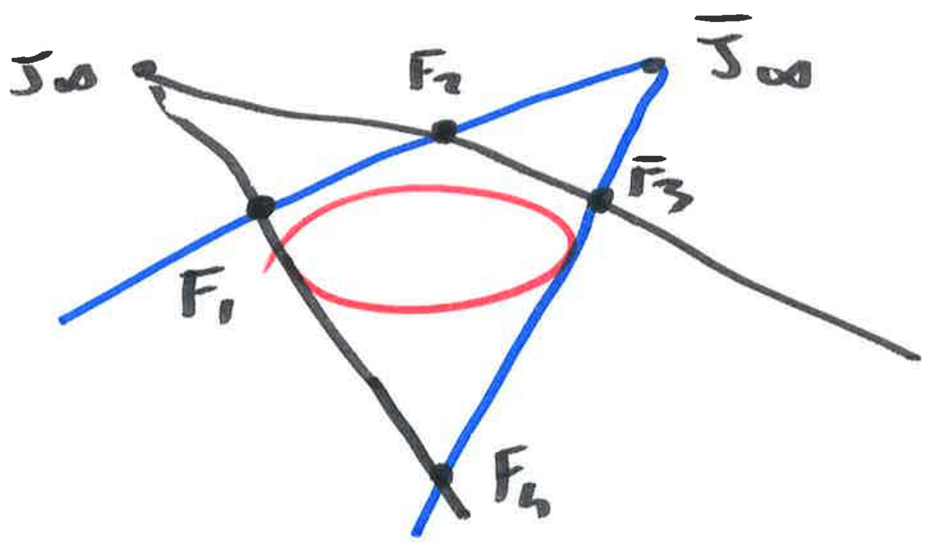
$$(x-0)^2+(y-1)^2=1$$

Def di fuoco.

Sia $\mathcal{C}$ una conica generale e siano $J_\infty = [(1, i, 0)]$ e $\bar{J}_\infty = [(1, -i, 0)]$ i 2 punti ciclici del piano.

chiamiamo d_1, d_2 le tangenti a $\mathcal{C}$ per il punto J_∞ e $\bar{d}_1, \bar{d}_2$ saranno le tg. di $\mathcal{C}$ per il punto $\bar{J}_\infty$.

Si dicono fuochi di $\mathcal{C}$ i punti di intersezione propri fra le rette $d_1, d_2, \bar{d}_1$ e $\bar{d}_2$.



In generale.

1) Se $\mathcal{C}$ circonferenza $\Rightarrow J_\infty, \bar{J}_\infty \in \mathcal{C}$

$\Rightarrow \exists!$ fuoco che coincide con il centro.

2) Se $\mathcal{C}$ parabola $\Rightarrow$ $\exists!$ fuoco. anche perché $d_2 = \bar{d}_2$ è la retta impropria.

3) Se $\mathcal{C}$ iperbole o ellisse $\Rightarrow \exists$ 4 fuochi distinti di cui 2 sono reali ($d_1 \cap \bar{d}_1$ e $d_2 \cap \bar{d}_2$) e 2 sono immaginari coniugati: $d_1 \cap \bar{d}_2$ e $d_2 \cap \bar{d}_1$. $\square$