Teorema dell'ordine.

Sia $\mathcal{C}$ una curva algebrica in $PG(2,\mathbb{C})$ di ordine n.

Allora ogni retta non contenuta in $\mathcal{C}$ interseca $\mathcal{C}$ in esattamente n punti contati con le debite molteplicità.

DIM: Sia $F(x_1\, x_2\, x_3) = 0$ l'eq. omogenea di $\mathcal{C}$ e siano

$$P = \left[\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}\right] \qquad Q = \left[\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix}\right]$$

due punti distinti di $PG(2,\mathbb{C})$.

Allora la retta per P e Q ha equazioni parametriche

$$r \begin{cases} x_1 = \alpha x_1' + \beta x_1'' \\ x_2 = \alpha x_2' + \beta x_2'' \\ x_3 = \alpha x_3' + \beta x_3'' \end{cases} \qquad (\alpha,\beta) \neq (0,0)$$

sostituiamo questo in F

$$g(\alpha,\beta) := F(\alpha x_1' + \beta x_1'', \alpha x_2' + \beta x_2'', \alpha x_3' + \beta x_3'').$$

· Due possibilità

1) $g(\alpha,\beta) = 0 \quad \forall \alpha,\beta \Rightarrow \forall R \in r,\ R \in \mathcal{C}$
$\Rightarrow r \subseteq \mathcal{C}$. <u>FINE</u>

2) $g(\alpha,\beta)$ non è identicamente nullo
$\Rightarrow g(\alpha,\beta)$ è un polinomio omogeneo di grado $n = \deg F$

$$\boxed{g(\alpha,\beta) = g_0 \alpha^n \beta^0 + g_1 \alpha^{n-1} \beta^1 + \_\_ + g_n \alpha^0 \beta^n}$$

ove $g_i \in \mathbb{C}$ sono opportuni coeff.

DUE CASI

A) $g_0 \neq 0 \Rightarrow$ osserviamo che $\beta = 0$ non compare in alcuna possibile sol. di $g(\alpha, \beta) = 0$.

Infatti se $\beta = 0 \Rightarrow g(\alpha, 0) = g_0 \alpha^n$ e dunque dovrebbe essere $\alpha = 0$ ma $(\alpha, \beta) = (0,0)$ NON RAPP. ALCUN PUNTO.

Dividiamo il polinomio $g(\alpha,\beta)$ per $\beta^n \neq 0$ e poniamo $\xi = \frac{\alpha}{\beta}$

$$\check{g}(\xi) = g_0 \xi^n + g_1 \xi^{n-1} + \_\_\_ + g_n \xi^0$$

$\Rightarrow \check{g}(\xi)$ ha n radici in $\mathbb{C}$, $\xi_1 \dots \xi_n$ perché polinomio di grado n in una incognita $\Rightarrow$ esistono n punti di intersezione del tipo $[(\xi_i, 1)] = [(\alpha, \beta)]$ fra $\mathcal{C}$ e r.

B) $g_0 = g_1 = \dots = g_k = 0$; $g_{k+1} \neq 0$

$$\Rightarrow g(\alpha,\beta) = g_{k+1} \alpha^{n-k-1} \beta^{k+1} + \dots + g_n \alpha^0 \beta^n =$$

$$= \beta^{k+1}\big(\underbrace{g_{k+1}\alpha^{n-k-1}\beta^{0} + \dots + g_n\alpha^{0}\beta^{n-k-1}}_{(*)}\big)$$

$\Rightarrow$ per $g(\alpha,\beta)=0$ c'è la classe di autosoluzioni $[(1,0)]$ contata $k+1$ volte + soluzioni del tipo $[(\xi_i,1)]$ per l'eq. di grado $n-k-1$ (*) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ numero totale classi di autosoluz. = numero totale di punti =

$$(k+1)+(n-k-1)=n$$

$\square$

<u>Teorema</u>: Siano $\mathcal{C}$ ed $\mathcal{H}$ due curve algebriche di $PG(2,\mathbb{K})$ e supponiamo che $\mathcal{C}$ sia irriducibile (cioè ~~[illegible]~~ il polinomio $F(x_1, x_2, x_3)$ non si fattorizza come prodotto di 2 polinomi non banali) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ se $\mathcal{C} : F(x_1, x_2, x_3) = 0$

$\mathcal{H} : G(x_1, x_2, x_3) = 0$

si ha $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{H} \iff F \mid G$. *

"Siano $\mathcal{C}$ ed $\mathcal{H}$ due curve algebriche
$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{H} \iff$ [sotto certe ipotesi]
l'equazione di $\mathcal{C}$ divide l'equazione
di $\mathcal{H}$."

$$\mathcal{C} : (x_1 + x_2 + 3x_3)^2 = 0$$

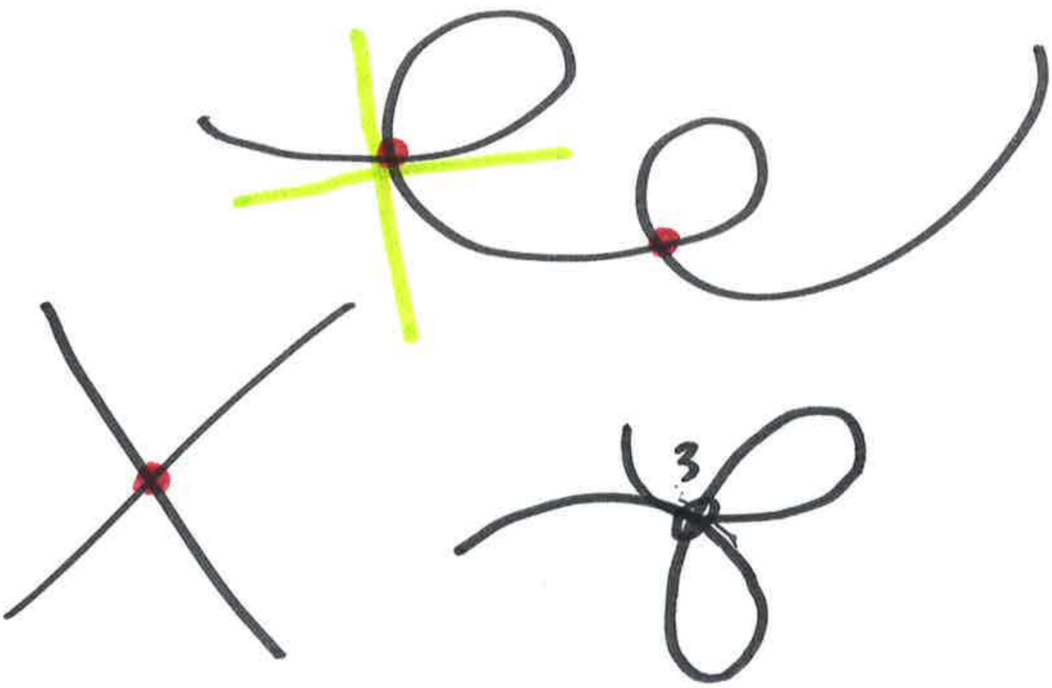
$$\mathcal{H} : (x_2 + x_2 + 3x_3)(x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2) = 0$$

$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{H}$ ma l'eq. di $\mathcal{C}$ non
divide l'eq. di $\mathcal{H}$.

→ Geometricamente INCLUSIONE	Algebricamente DIVISIBILITÁ

Def: Sia $\mathcal{C} \subseteq PG(2, \mathbb{C})$ una curva algebrica e $P \in \mathcal{C}$. Si dice che P è un punto r-uplo per $\mathcal{C}$ se ogni retta passante per P interseca $\mathcal{C}$ in P r-volte ed esistono esattamente r rette che passano per P ed intersecano $\mathcal{C}$ in P (almeno) $r+1$ volte. (contate opportunamente).

$r = 2$: punto doppio.



Si verifica che i punti multipli di $\mathcal{C} : F(x_1, x_2, x_3) = 0$ sono tutti e soli i punti di $\mathcal{C}$ tali che

$$\begin{cases} F(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$$

ove se $\cancel{F(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\substack{i,j,k \\ i+j+k=n}} f_{ijk} x_1^i x_2^j x_3^k}$

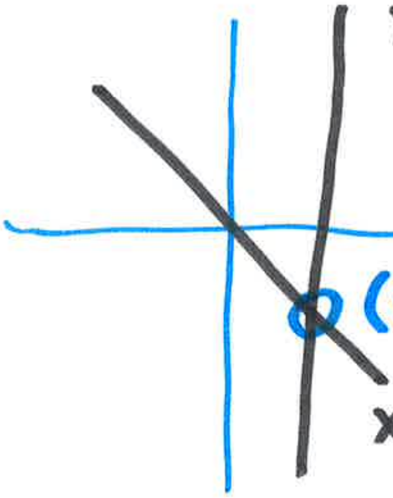
$$F(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j \le n}}^{n} f_{ij} x_1^i x_2^j x_3^{n-i-j}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \sum f_{ij} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^i x^j x^{n-i-j}\right) =$$

$$= \sum f_{ij}\, i\, x_1^{i-1} x^j x^{n-i-j}$$

$$F(x_1\ x_2\ x_3) = \boxed{(x_1+x_2)}\,\boxed{(x_1-x_3)}$$
$$= x_1^2 + x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2 - x_3 \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = \boxed{x_1 - x_3} \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial x_3} = \boxed{-x_1 - x_2} \end{cases}$$



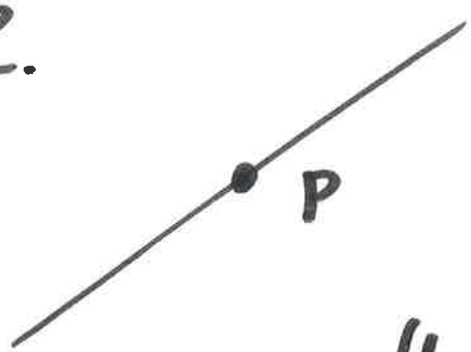
<u>N.B</u> $\quad x_1 = x_3$

$x_2 = -x_1 = -x_3$ corrisponde

ad un punto su $\mathcal{C}$ che in coordinate affini è $(1,-1)$ ed è proprio l'intersezione delle 2 rette che compongono $\mathcal{C}$.

proposizione: Sia $\mathcal{C}$ una curva di ordine n. Se $\mathcal{C}$ ha un punto n-uplo $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ è unione di n rette (non necessariamente distinte).

DIM $n=2$. Supponiamo che $\mathcal{C}$ abbia un punto doppio $P \in \mathcal{C}$.



Allora ogni retta per P interseca $\mathcal{C}$ almeno 2 volte in P.

Se $Q \in \mathcal{C}$ con $Q \neq P$, la retta PQ interseca $\mathcal{C}$ almeno 3 volte (2 in P ed 1 in Q) $\Rightarrow$ $PQ \subseteq \mathcal{C}$. Allora l'equazione

$G(x_1\ x_2\ x_3)=0$ di PQ

divide l'equazione di $\mathcal{C}$

(diciamo $F(x_1\ x_2\ x_3)=0$)

cioè

$$\underbrace{F(x_1\ x_2\ x_3)}_{\deg 2}=\underbrace{G(x_1\ x_2\ x_3)}_{\deg 1}H(x_1\ x_2\ x_3)$$

$\Rightarrow \deg H(x_1\ x_2\ x_3)=1$ e la curva $\mathcal{C}$ è unione delle rette $r': G(x_1\ x_2\ x_3)=0$ ed $s': H(x_1\ x_2\ x_3)=0$. $\square$

per induzione $n \Rightarrow n+1$.

$\mathcal{C}$ curva di ordine $n+1$ con punto P $(n+1)$-uplo $\Rightarrow$ prendiamo $Q\in\mathcal{C}$ con $Q\neq P$ $\Rightarrow$ la retta PQ di eq. $G(x_1\ x_2\ x_3)=0$ interseca $\mathcal{C}$ in almeno $n+2$ punti $\Rightarrow$ se $F(x_1\ x_2\ x_3)=0$ è l'eq. di $\mathcal{C}$ abbiamo

$\overline{PQ} \subseteq \mathcal{C} \Rightarrow G(x_1 x_2 x_3) \mid F(x_1 x_2 x_3)$

$$\Rightarrow \underbrace{F(x_1, x_2 x_3)}_{\deg k+1} = \underbrace{G(x_1, x_2 x_3)}_{\deg 1} \underbrace{H(x_1 x_2 x_3)}_{\deg k.}$$

$\Rightarrow \deg H(x_1\ x_2\ x_3) = k.$

osserviamo che P é punto k-uplo per $\mathcal{C}'$: $H(x_1\ x_2\ x_3) = 0$ perché ogni retta interseca $\overline{PQ}$ in P una volta ed $\mathcal{C} = G(x_1\ x_2\ x_3)\ H(x_1\ x_2\ x_3)$ in P k+1 volte $\Rightarrow$ deve intersecare $\mathcal{C}'$ k volte in P.

per ipotesi induttiva ~~Hxx~~ $\mathcal{C}'$: $H(x_1\ x_2\ x_3) = 0$ si spezza nell'unione di k rette $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ si spezza nell'unione di k+1 rette (aggiungiamo $\overline{PQ}$) $\square$

Esercizi.

Si determinino in $A_3(\mathbb{R})$ due rette sghembe contenute nei piani paralleli

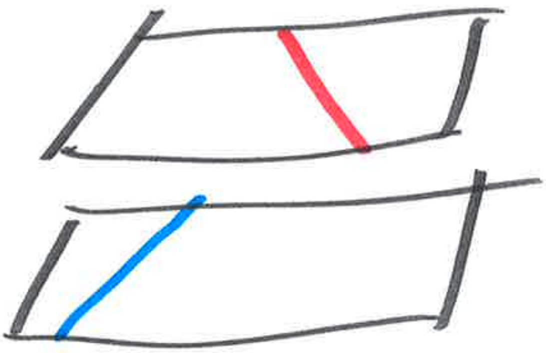
$$\begin{cases} \pi: x-y-z=2 \\ \pi': x-y-z=4 \end{cases}$$

basta prendere 2 altri piani non paralleli.

σ: $x=1$

ϑ: $y=1$

$$r: \begin{cases} x-y-z=2 \\ x=1 \end{cases}$$



$$s: \begin{cases} x-y-z=4 \\ y=1 \end{cases}$$

posizione reciproca di 3 piani

$\pi_K \quad x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$

$\sigma_K \quad (k-1)x_1 + (k+1)x_2 + 2x_3 + (6k-14)x_4 = 0$

$\vartheta_K \quad kx_1 + (k+3)x_2 + 3x_3 + (6k-12)x_4 = 0$

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & \boxed{1} & 2 \\ k-1 & k+1 & 2 & 6k-14 \\ \boxed{k} & k+3 & \boxed{3} & 6k-12 \end{bmatrix} \leftarrow \text{III riga}$$

= I riga + II riga.

$1 \leq rk(A) \leq 2$

Se $rk(A) = 1 \Rightarrow$ i 3 piani coincidono

Se $rk(A) = 2 \Rightarrow$ i 3 piani formano un fascio

$\forall k \neq 3$

↓

proprio/improprio

ci sono piani che coincidono?

se $k=3$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & \cancel{4} & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow rk(A)=1$

$\Rightarrow \pi_3 = \sigma_3 = \nu_3$

$k \neq 3$ osserviamo che la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ k-1 & k+1 & 2 & 6k-14 \\ k & k+3 & 3 & 6k-12 \end{bmatrix}$$

ha sempre righe non proporzionali (i.e. ogni 2 righe della matrice per $k \neq 3$ sono indipendenti).

Infatti $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ I e III indip.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6k-14 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ I e II indip.

$\begin{vmatrix} 2 & 6k-14 \\ 3 & 6k-12 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ II e III indip.

se $K \neq 3 \Rightarrow \pi_K, \sigma_K$ e ϑ_K sono 3 piani distinti.

- il fascio di piani è in coord. non omogenee dato da

$$\lambda(x+2y+z+2)+\mu((k-1)x+(k+1)y+2z + (6k-14))=0$$

è improprio $\Leftrightarrow$ i 2 piani sono paralleli $\Leftrightarrow$

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ k-1 & k+1 & 2 \end{pmatrix}=1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k-1=2 \\ k+1=4 \end{cases} \Rightarrow k=3 \text{ ma}$$

noi siamo nell'ipotesi $k \neq 3$ $\lightning$.

$\rightarrow$ in particolare per $k \neq 3$ si ha sempre un fascio proprio di piani (e i piani sono tutti $\neq$)

Coniche in $PG(2, \mathbb{C})$.

In $PG(2, \mathbb{C})$ una curva algebrica del I ordine é una retta.

(può essere propria o impropria; reale oppure immaginaria).

Studiamo le curve del II ordine.

curve di eq. del tipo

$$\boxed{F(x_1\ x_2\ x_3) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0}$$

generico polinomio omogeneo in $x_1\ x_2\ x_3$ di grado $= 2$.

Def: Si dice conica una curva algebrica reale piana del II ordine.

- **Algebrica**: $\mathcal{C} = \tilde{\mathcal{V}}(F)$ ove $F(x_1\ x_2\ x_3)$ è un polinomio omogeneo non costante
- **Reale**: i coeff. di $F(x_1\ x_2\ x_3)$ sono elementi di $\mathbb{R}$
- **Piana**: la curva è contenuta in un piano. → siamo in $PG(2,\mathbb{C})$.
  (in generale, se fossimo in $PG(n,\mathbb{C})$, $\exists\ \pi$ piano tale che $\mathcal{C} \subseteq \pi$).
- **Del II ordine**: l'equazione $F(x_1\ x_2\ x_3)$ è di II grado.

OSS: Una conica non ha punti tripli ed è riducibile se e solamente se ha almeno un punto doppio.

DIM: Se $P \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ conica fosse triplo $\Rightarrow \forall$ retta per P sarebbe contenuta in $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ coinciderebbe col piano (!) $\Rightarrow F(x_1\ x_2\ x_3) \equiv 0$ ↯

Se $P \in \mathcal{C}$ e P doppio $\Rightarrow$ visto prima che $\mathcal{C}$ è unione di 2 rette (non necess. distinte).

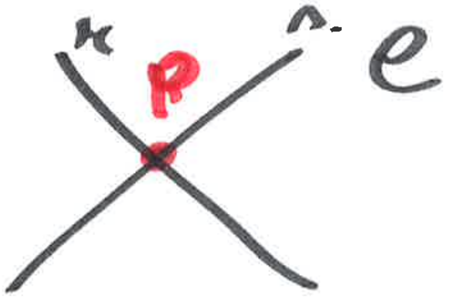
- Supponiamo $\mathcal{C}$ riducibile

$\Rightarrow$ $\mathcal{C} = r \cup s$ con

$r: G(x_1\ x_2\ x_3) = 0$

$s: H(x_1\ x_2\ x_3) = 0$

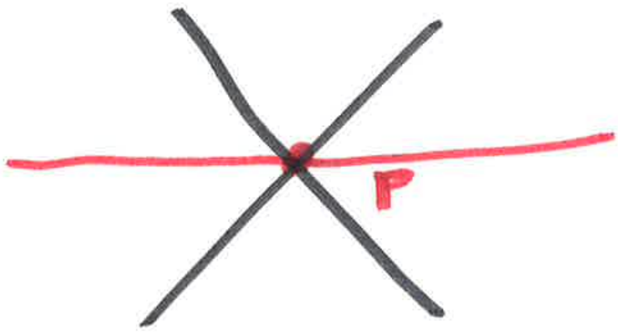
rette perché $\mathcal{C}$ è curva del II ordine. $\Rightarrow$



Sia $P \in r \cap s$. e $Q \in \mathcal{C} \setminus \{P\}$.

$\Rightarrow PQ = r$ (se $Q \in r$) oppure
$PQ = s$ (se $Q \in s$) e $PQ \subseteq \mathcal{C}$.

In particolare una retta per P che non è r oppure s necess. deve intersecare $\mathcal{C}$ <u>solamente</u> in P
$\Rightarrow$ tutte e due le intersezioni di questa retta (perché per il teo. dell'ordine ce ne sono sempre 2!) devono essere in P. $\Rightarrow P$ doppio $\square$



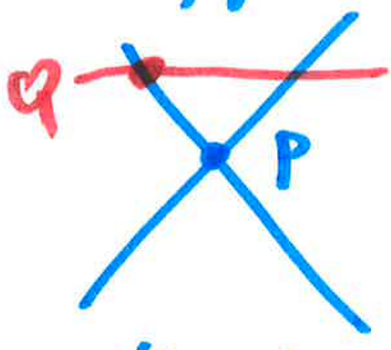
Def: Una conica è detta <u>generale</u> se è priva di punti doppi; <u>semplicemente degenere</u> se ha 1^{solo} punto doppio; <u>doppiamente degenere</u> se ha almeno 2 punti doppi

<u>proposizione</u>: Una conica semplicemente degenere è unione di 2 rette distinte (reali e distinte o imm. coniugate)

Una conica doppiamente degenere è unione di una retta reale contata 2 volte.

<u>DIM</u> $P \in \mathcal{C}$; P doppio; unico pto doppio su $\mathcal{C}$. Sia Q un altro punto di $\mathcal{C}$. per Q devono esistere

$\mathcal{C} = r \cup s$

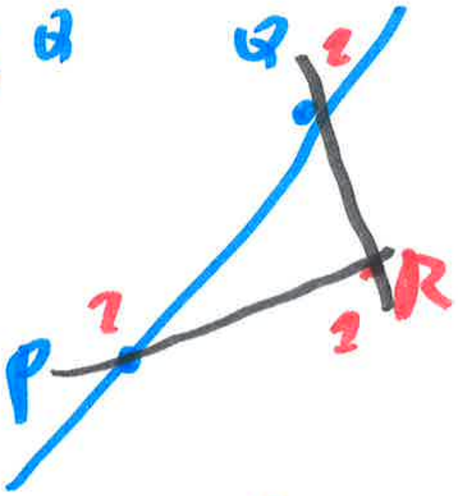


delle rette che intersecano la conica anche non in Q e non sono contenute in $\mathcal{C}$

$\Rightarrow$ i punti di $\mathcal{C}$ non possono stare

punti su di una retta ⇒
⇒ $\mathcal{C}$ è unione di 2 rette distinte.

Supponiamo $\mathcal{C}$ abbia 2 punti doppi, P, Q, $P \neq Q$



e sia R un altro punto di $\mathcal{C}$ non su $\overline{PQ}$

⇒ PR come retta dovrebbe essere contenuta in $\mathcal{C}$ (perché interseca 2 volte in P ed 1 in R);
idem per QR ed anche per PQ perché interseca 2 volte in P + 2 volte in Q ⇒
$\mathcal{C}$ conterrebbe almeno 3 rette
⇒ $\mathcal{C}$ dovrebbe essere una curva del $\geq$ III ordine

$\Rightarrow R \in \overline{PQ} \Rightarrow \mathcal{C}$ è una retta contata 2 volte.

$\square$

Es

Verificare come es. che $\mathcal{C}$ può essere unione di 2 rette reali oppure 2 rette imm. coniugate e determinare i punti reali nel II caso.