Coordinate omogenee.

$$AG(n, \mathbb{K}) \rightsquigarrow \widetilde{AG(n, \mathbb{K})}$$

ampliamento.

A punti $\longrightarrow$ punti propri

$\{W \mid W \leq V_n(\mathbb{K}), \dim W = 1\} \longrightarrow$ punti impropri.

$\Sigma \leq AG(n, \mathbb{K})$

$$\Sigma = [P; W] \longmapsto \tilde{\Sigma} = \Sigma \cup \{T \leq W;\ \dim T = 1\}.$$

In $\widetilde{AG(2, \mathbb{K})}$ due rette distinte ampliate hanno sempre intersezione $\neq \emptyset$.

→ se é un punto proprio le rette erano incidenti, se é il punto improprio le rette erano parallele.

$PG(n, \mathbb{K}) \equiv$ geometria i cui "punti" sono gli elementi di

$$\frac{\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}}{\sim}$$

ove 2 vettori $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}$.
sono equivalenti $\iff \exists \alpha : \bar{v} = \alpha \bar{w}$

I punti di $PG(n, \mathbb{K})$ sono classi di equivalenza di $(n+1)$-uple di elementi di $\mathbb{K} \neq \underline{0}$ a meno di un fattore di proporzionalità.

$\downarrow$

I punti di $PG(n, \mathbb{K})$ corrispondono esattamente ai <u>sottospazi vettoriali 1-dimensionali di $\mathbb{K}^{n+1}$</u>

in quanto $\bar{v} \sim \bar{w} \iff \bar{v} = \alpha \bar{w}$ con $\bar{v}, \bar{w} \neq \underline{0}$ e dunque $\alpha \neq 0$
$\iff \mathcal{L}(\bar{v}) = \mathcal{L}(\bar{w})$.

I sottospazi $(t+1)$-dimensionali di $\mathbb{K}^{n+1}$ sono detti sottospazi di $PG(n,\mathbb{K})$ di dimensione proiettiva t (e rango $t+1$)

Si dice, dato $\Sigma \leq PG(n,\mathbb{K})$ che un punto $P \in PG(n,\mathbb{K})$ è un elemento di Σ se $P \leq \Sigma$. (incidenza è quella naturale).

1) esiste una corrispondenza dai punti di $\widetilde{AG(n,\mathbb{K})}$ ai punti di $PG(n,\mathbb{K})$.

2) Ogni sottospazio ampliato di $AG(n,\mathbb{K})$ corrisponde ad un sottospazio proiettivo di $PG(n,\mathbb{K})$.

La corrispondenza è la seguente:

$$P \in \widetilde{AG(n,\mathbb{K})} \begin{cases} P=(x_1 \ldots x_n) & \text{proprio} \\ \tilde{P} = \mathcal{L}((\ell_1 \ldots \ell_n)) & \text{improprio} \end{cases}$$

$$\psi \begin{cases} A \cup A_\infty \longrightarrow PG(n, \mathbb{K}) \\ P \longrightarrow \begin{cases} \text{proprio } [(x_1 \dots x_n\ 1)] \\ \text{improprio } [(\ell_1 - \ell_n\ 0)] \end{cases} \end{cases}$$

ultima componente $\neq 0$

ultima componente $= 0$

<u>OSS</u>: ψ é una biezione.

ψ é iniettiva:

Supponiamo $\psi(P) = \psi(Q)$

$\Rightarrow$ e P, Q punti propri

questo significa

$$\mathcal{L}((x_1 — x_n\ 1)) = \mathcal{L}((y_1 — y_n\ 1))$$

ove $P = (x_1 —— x_n)$

$Q = (y_1 —— y_n)$

$$\Rightarrow rk\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n & 1 \\ y_1 & \ldots & y_n & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow (x_1 \ldots x_n) = (y_1 \ldots y_n)$$

$$\Rightarrow P = Q.$$

Se P proprio, Q improprio

ovviamente $\psi(P) \neq \psi(Q)$

perché $\mathcal{L}((x_1 \ldots x_n\ 1)) \neq$

$\mathcal{L}((y_1 \ldots y_n\ 0))$

Se P, Q entrambi impropri

$$\Rightarrow P = \mathcal{L}((\ell_1 \ldots \ell_n))$$

$$Q = \mathcal{L}((m_1 \ldots m_n))$$

$$\psi(P) = \psi(Q) \Rightarrow \mathcal{L}((\ell_1 \ldots \ell_n\ 0)) =$$

$$= \mathcal{L}((m_1 \ldots m_n\ 0))$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}((\ell_1, \ldots \ell_n)) = \mathcal{L}((m_1 \ldots m_n))$$

cioè $P = Q$.

viceversa la funzione φ è suriettiva perché data una qualsiasi classe $[(z_1 \text{—} z_n z_{n+1})]$

possiamo definire

$$\varphi^{-1}([z_1 \text{—} z_n z_{n+1}]) :=$$

punto improprio

$$\begin{cases} \text{se } z_{n+1} = 0 \rightarrow f((z_1 \text{—} z_n)) \\ \text{se } z_{n+1} \neq 0 \rightarrow P = \left(\frac{z_1}{z_{n+1}} \cdots \frac{z_n}{z_{n+1}} \right) \end{cases}$$

punto proprio.

verificare che φ^{-1} è ben definita cioè il suo valore non dipende dal rappresentante scelto nella classe di proporzionalità.

Sia $P \in \widetilde{AG(n, \mathbb{K})}$. Si dicono coordinate omogenee di P la classe $[(z_1 \_\_ z_n\, z_{n+1})]$ ottenuta come $\psi(P)$.

$PG(n, \mathbb{K})$.

Ogni sottospazio di $AG(n, \mathbb{K})$ si può leggere come una intersezione di iperpiani.

↓

un sottospazio di $AG(n, \mathbb{K})$ é descrivibile mediante un opportuno sistema lineare.

↓

ogni equazione del sistema lineare corrisponde all'eq. di un iperpiano

↓

il sistema descrive l'intersezione di un insieme di iperpiani.

Se noi sappiamo come si rappresentano

gli iperpiani ⇒ sappiamo rappresentare tutto.

In $AG(n, \mathbb{K})$ un iperpiano è descritto da una equazione

$$\Pi: \boxed{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + b = 0}$$

consideriamo adesso in $PG(n, \mathbb{K})$ l'insieme di tutti i punti immagine dei punti propri di $\tilde{\Pi}$.

$$\Sigma_0 = \{ [(z_1 \text{ --- } z_n \, z_{n+1})] \mid \underset{z_{n+1} \neq 0}{\varphi^{-1}([(z_1 \text{ --- } z_{n+1})]} \in \Pi \}.$$

$$\underset{z_{n+1} \neq 0}{\varphi^{-1}([(z_1 \text{ --- } z_n \, z_{n+1})]} = \underset{\in \Pi}{\left(\frac{z_1}{z_{n+1}} \; \frac{z_2}{z_{n+1}} \dots \frac{z_n}{z_{n+1}} \right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 \frac{z_1}{z_{n+1}} + a_2 \frac{z_2}{z_{n+1}} + \text{ --- } + a_n \frac{z_n}{z_{n+1}} + b = 0$$

con $z_{n+1} \neq 0$ ⇒

$$* \quad \boxed{a_1 z_1 + a_2 z_2 + \text{ --- } + a_n z_n + b z_{n+1} = 0}$$

equazione omogenea di π.

Cosa succede ai punti impropri di $\tilde{\pi}$ → direzioni delle rette in $\tilde{\pi}$.

→ sottospazi di dim 1 del sott. ~~[illegible]~~ di traslazione associato a π.

cioè sono tutti i sottospazi del tipo

$$\mathcal{L}((z_1 \text{——} z_n))$$

ove $\underbrace{a_1 z_1 + \text{——} + a_n z_n = 0}_{}$

equazione che fornisce il sottospazio di trasl. di π.

ma l'immagine di questi punti mediante φ è proprio data dalle classi di autosoluzioni di

$$\begin{cases} a_1 z_1 + \text{——} + a_n z_n + b z_{n+1} = 0 \\ z_{n+1} = 0 \end{cases}$$

→ ANCHE I PUNTI IMPROPRI SODDISFANO (*)

Sia $\Pi : a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0$

$\tilde{\Pi}$ ampliamento di Π.

$\Sigma = \psi(\tilde{\Pi})$ in $PG(n, \mathbb{K})$.

I punti di Σ sono tutte e sole le classi di autosoluzioni dell'equazione omogenea

$$\boxed{a_1z_1 + \dots + a_nz_n + bz_{n+1} = 0}$$

In particolare Σ corrisponde ad un sottospazio vettoriale di rango n in $\mathbb{K}^{n+1}$. (dim. proiettiva $n-1$).

Def: Si dicono sottospazi di $AG(n, \mathbb{K})$ di dimensione t le retroimmagini di spazi vett. di ~~[illegible]~~ rango $t+1$ di $\mathbb{K}^{n+1}$ mediante ψ.

In particolare ogni sottospazio affine di dimensione t è un sottospazio di $\widetilde{AG(n, \mathbb{K})}$ di dimensione t ma in $\widetilde{AG(n, \mathbb{K})}$ ci sono anche sottospazi di $\dim = t$ fatti da tutti punti impropri.

Esempi: $n=2$ ed $n=3$.

$$AG(2, \mathbb{K}) \longrightarrow \widetilde{AG(2, \mathbb{K})} \longrightarrow PG(2, \mathbb{K})$$

$$(x, y) \text{ proprio} \longrightarrow [(x, y, 1)]$$

$$\mathcal{L}((\ell, m)) \text{ improprio} \longrightarrow [(\ell, m, 0)]$$

retta: (propria)

$r_6: ax + by + c = 0 \longrightarrow a\frac{z_1}{z_3} + b\frac{z_2}{z_3} + c = 0$

$(a, b) \neq (0, 0)$.

$$x = \frac{z_1}{z_3} \quad y = \frac{z_2}{z_3}$$

$$\boxed{a z_1 + b z_2 + c z_3 = 0}$$

eq. omogenea di r_6

N.B. anche $z_3 = 0$ (cioè l'eq. che si ha per $a = b = 0$; $c \neq 0$) descrive un sottosp. di $\mathbb{K}^3$ di rango $= 2$ $\Rightarrow$ questa è una retta di $\overline{AG(2,\mathbb{K})}$ fatta da tutti punti impropri.

$\downarrow$

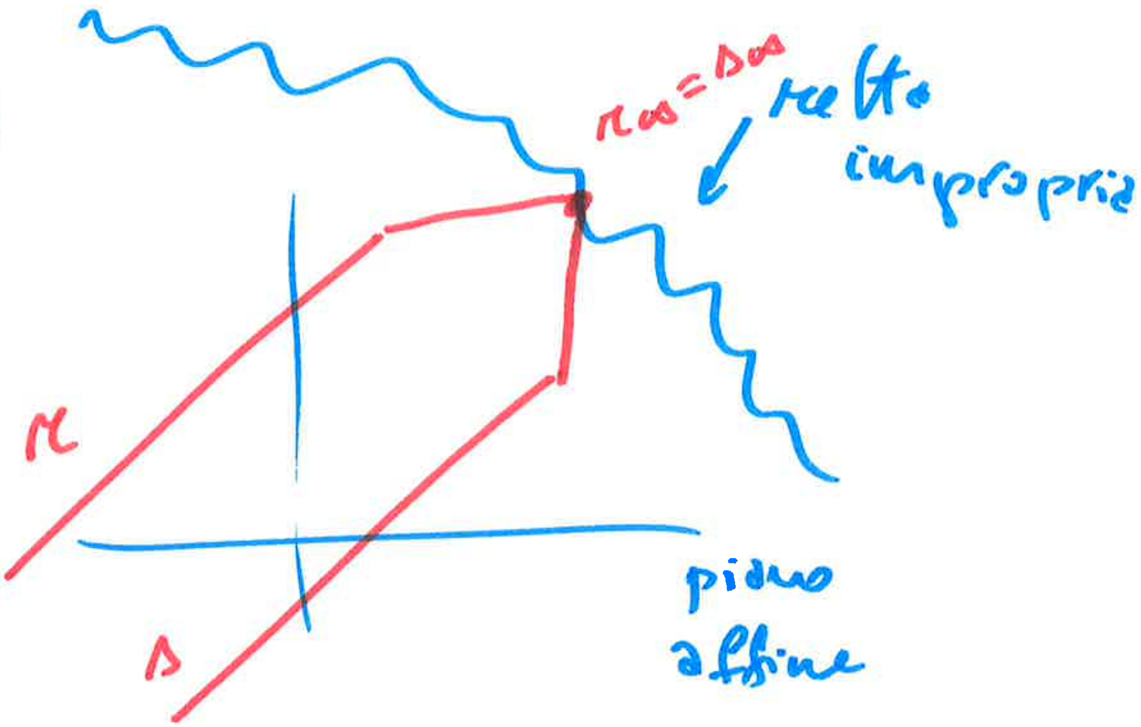
in particolare ogni punto improprio di $AG(2,\mathbb{K})$ è contenuto in tale retta.

$\downarrow$

La retta di eq. $z_3 = 0$ è detta retta impropria di $\overline{AG(2,\mathbb{K})}$ o $PG(2,\mathbb{K})$.

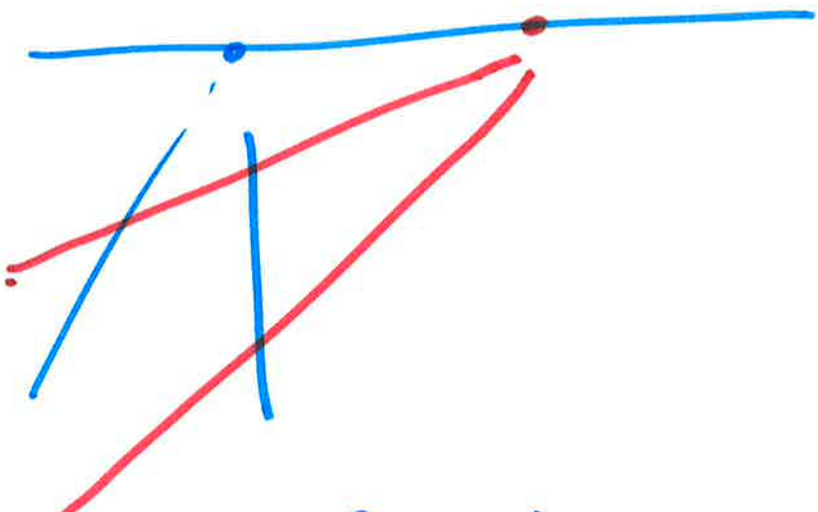
La retta impropria coincide con l'insieme di tutte le dir. delle rette del piano.

AG(2, ℝ)



r // s

Nella rapp. del piano in prospettiva la retta impropria è la linea di orizzonte (+ un punto).



Esercizio: In $\widehat{AG(2, \mathbb{K})}$ due rette hanno sempre intersezione $\neq \emptyset$

DIM: siano $\tilde{r}_0$ ed $\tilde{s}$ due rette di $\widehat{AG(2,\mathbb{K})}$ $\Rightarrow$ $\tilde{r}_0$ ed $\tilde{s}$ corrispondono a 2 sottospazi di $\mathbb{K}^3$ entrambi di ~~dim~~ rk $=2$. Ma 2 sottospazi di rk 2 in uno spazio di rk $=3$ si intersecano sempre almeno in un sottospazio di rk $=1$ cioè in un punto di $PG(2,\mathbb{K})$ $\square$

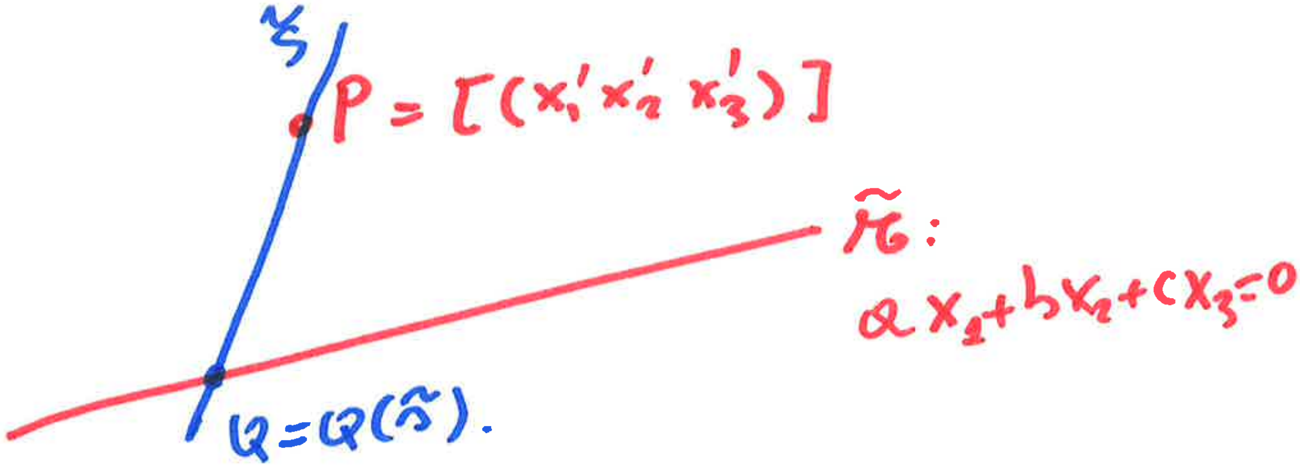
→ Ho usato la formula di Grassmann.

→ In particolare noi possiamo studiare le intersezioni di sottospazi affini (ampliati) mediante lo studio delle intersezioni di sottospazi vettoriali opportuni (e questo è più facile!).

Teorema: In $PG(2,\mathbb{K})$ c'é una corrispondenza biettiva fra i punti di un fascio e i punti di una retta che non passa per il centro del fascio.

[N.B: fascio proprio se il suo centro é un punto proprio; fascio improprio altrimenti].

DIM



$\forall$ retta $\tilde{s}$ passante per P corrisponde (é) un sott. di dim $= 2$ di $\mathbb{K}^3$.

$\tilde{r}$ é un sott. di dim$=2$ di $\mathbb{K}^3$ $\Rightarrow$ con $\hat{r} \neq \hat{s}$ perché $P \notin \tilde{r}$.

$\hat{r} \cap \hat{s} = \{Q\}$. Ad ogni retta per P corrisponde un punto Q su $\tilde{r}$

viceversa: Sia $Q = [(x_1'' \; x_2'' \; x_3'')]$

un punto per $\tilde{\pi}$.

Allora $\mathcal{L}((x_1' \, x_2' \, x_3'),(x_1'' \, x_2'' \, x_3''))$

corrisponde ad una retta per P e per Q e quindi ad un elemento del fascio di centro P $\square$.

<u>OSS</u>:

Se $P \equiv [(x_1' \, x_2' x_3')]$ con $P \neq Q$

$Q \equiv [(x_1'' \, x_2'' \, x_3'')]$

$\Rightarrow$ retta per P e Q. corrisponde al sottospazio $\mathcal{L}((x_1' x_2' x_3'),(x_1'' x_2'' x_3''))$

(notiamo che ci basta fare la chiusura lineare mentre in $AG(2,\mathbb{K})$ dovevamo considerare separatamente punti e sott. di traslazione).

Cosa significa $R \in \mathcal{L}(P,Q)$.

$R = [(x_1 \; x_2 \; x_3)]$

$$(x_1\ x_2\ x_3) \in \mathcal{L}((x_1'\ x_2'\ x_3'),(x_1''\ x_2''\ x_3''))$$

In termini matriciali

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1' & x_1'' \\ x_2 & x_2' & x_2'' \\ x_3 & x_3' & x_3'' \end{vmatrix} = 0$$

$rk = 2$

Supponiamo di avere coord. normalizzate e che $x_3, x_3', x_3'' \neq 0$ (tutti punti propri).

$$x = \frac{x_1}{x_3} \qquad y = \frac{x_2}{x_3}.$$

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

e se $Q = [(l, m, 0)]$ è un punto improprio?

$$\begin{vmatrix} x & x' & l \\ y & y' & m \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$n=3$

eq. di un piano in $AG(3,\mathbb{K})$

$$ax+by+cz+d=0$$

$$\downarrow$$

$$ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0$$

$$x=\frac{x_1}{x_4} \quad y=\frac{x_2}{x_4} \quad z=\frac{x_3}{x_4}$$

se $(a,b,c)=(0\ 0\ 0)$

NON ABBIAMO UN PIANO PROPRIO MA ABBIAMO L'INSIEME DI TUTTI I PUNTI IMPROPRI DI

$\widetilde{AG(3,\mathbb{K})} \rightarrow \pi_\infty =$ (iper) piano improprio di $\widetilde{AG(3,\mathbb{K})}$.

rette. $AG(3,\mathbb{K})$

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

$$rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=2$$

$$(*)\quad \begin{cases} ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0 \\ a'x_1+b'x_2+c'x_3+d'x_4=0 \end{cases}$$

retta descritta in coord. omogenee.

se $rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=2 \Rightarrow$ è una retta propria.

d'altro canto se $rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=1$

e $rk\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}=2$

$\Rightarrow$ il sistema $(*)$ è equivalente a

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0 \\ x_4=0 \end{cases}$$

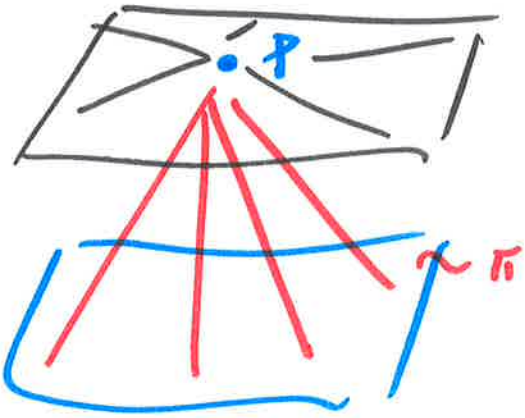
$\rightarrow$ si ottiene un sottospazio di $\mathbb{K}^4$ di dim $=2$ $\rightarrow$ retta di punti impropri.

OSS: In generale si dice fascio di piani ~~...~~ l'insieme di tutti i piani che passano per una retta.

retta propria → fascio proprio

retta impropria → fascio improprio.

<u>Teorema</u>: In $\widetilde{AG(3,\mathbb{K})}$ c'è una corrispondenza 1-1 fra ~~…~~ gli elementi di una stella di rette per un punto P ed un piano $\tilde{\pi}$ con $P \notin \tilde{\pi}$.



$\infty^2 + \infty^2$

<u>DIM</u>: $\tilde{\pi}$ è un sott. di $\mathbb{K}^4$ di rango 3.

ogni retta $\tilde{r}$ per P è un sott. di $\mathbb{K}^4$ di rango 2 non contenuto in $\tilde{\pi}$.

$\Rightarrow rk(\tilde{r} \cap \pi) = 1$ $\quad \tilde{r} \cap \tilde{\pi}$ è un sott. di $rk = 1$

e dunque un punto e $\forall$ punto di $\tilde{\pi}$ $\exists!$ retta della stella

N.B: per calcolare la retta per 2 punti in $PG(3,\mathbb{K})$ bisogna determinare il corrispondente spazio 2 dim. e non nec. usare la formula dei rapporti uguali.

Esercizio.

Trovare la retta di $PG(3,\mathbb{K})$ per i punti di coord. affini

$P=(1\,2\,0)$ $\quad$ $Q=(0\,1\,2)$.

$\| \quad\quad \|$

$[(1\,2\,0\,1)]$ $\quad$ $[(0\,1\,2\,1)]$

é una retta propria.

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-1}{2-1}=\frac{z-2}{0-2}$$

AFFINE $\begin{cases} x = y-1 \\ x = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - x_4 \\ x_1 = x_3 \end{cases}$

C. OMOGENEE

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 2 & 1 \\ x_3 & 0 & 2 \\ x_4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 2 & 1 \\ x_3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 & \rightarrow -\begin{vmatrix} x_2 & 1 \\ x_3 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} x_1 & 0 \\ x_3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 2 & 1 \\ x_4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 & x_2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_2 & 1 \\ x_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

N.B: Se si chiede la retta per $P = [(1200)]$ e $Q = [(1101)]$

NON SI PUÓ USARE LA FORMA "RAPPORTI UGUALI" perché P é improprio!

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-0}{0}$$

parametri direttori della retta.

In alternativa

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 2 & 1 \\ x_3 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

N.B.II: Se $P = [(1\,2\,0\,0)]$

$Q = [(0\,1\,1\,0)]$

allora l'unico modo per scrivere la retta per P e Q è

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 2 & 1 \\ x_3 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$2x_1 - \begin{vmatrix} x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 2 & 1 \\ x_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 2 & 1 \\ x_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

uno dei piani è il piano improprio!!

N.B. Primo per 3 punti non allineati:

$$P = [(x_1' \; x_2' \; x_3' \; x_4')]$$

$$Q = [(x_1'' \; x_2'' \; x_3'' \; x_4'')]$$

$$R = [(x_1''', x_2''', x_3''', x_4''')]$$

$\Rightarrow$ l'essere non allineati è equivalente a dire che $rk \begin{pmatrix} x_1' & x_1'' & x_1''' \\ x_2' & x_2'' & x_2''' \\ x_3' & x_3'' & x_3''' \\ x_4' & x_4'' & x_4''' \end{pmatrix} = 3$

$\rightarrow [(x_1, x_2, x_3, x_4)] \in \pi \iff$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1' & x_1'' & x_1''' \\ x_2 & x_2' & x_2'' & x_2''' \\ x_3 & x_3' & x_3'' & x_3''' \\ x_4 & x_4' & x_4'' & x_4''' \end{vmatrix} = 0$$

Verificate che questa corrisponde alla condizione che avevamo visto nel caso dei punti propri con $x_4 = 1$

OSS: Cosa siano i punti impropri di un sottospazio lineare di $AG(n, \mathbb{K})$ è "naturale".

$$r \longrightarrow \tilde{r} = r \cup r_\infty$$

$[P; M]$ ove $r_\infty = \{W \leq M \mid \dim W = 1\}$

Come definizione funziona.

↓ punti & vettori

lo definiamo usando solo "punti" propri/impropri

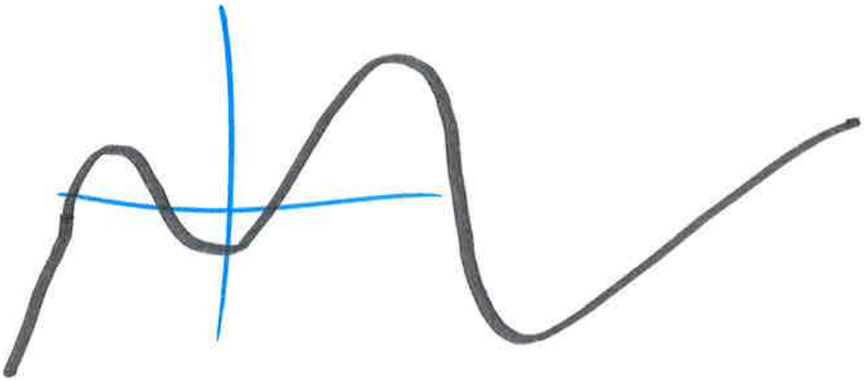
Cosa fare per una curva algebrica?

Sia $f(x,y) = 0$ una equazione in cui $f(x,y)$ è un polinomio a coeff. in $\mathbb{K}$ non costante di grado g.

Si dice curva algebrica di eq. $f(x,y)=0$ in $AG(2, \mathbb{K})$ l'insieme dei punti

$$V(f) = \{(x,y) \mid f(x,y) = 0\}.$$

come estendere le curve algebrica ad $\widehat{AG(2,\mathbb{K})}$ ovvero a $PG(2,\mathbb{K})$.



Ragioniamo in termini di equazioni

$f(x,y)=0$ poniamo $x=\frac{x_1}{x_3}$ $y=\frac{x_2}{x_3}$

e scriviamo

$$\boxed{F(x_1\, x_2\, x_3) = x_3^{\deg f}\, f\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right)}$$

equazione omogenea di $V(f)$.

$$\boxed{\tilde{V}(F) = \left\{ [(x_1\, x_2\, x_3)] \,\middle|\, \begin{array}{l} F(x_1\, x_2\, x_3)=0 \\ (x_1\, x_2\, x_3) \neq \underline{0} \end{array} \right\}}.$$

$\subseteq PG(2,\mathbb{K})$

I punti propri di $\tilde{V}(F)$ corrispondono alle classi $[(x\ y\ 1)]$ e corrispondono ai punti della curva affine $V(f)$ in $AG(2,\mathbb{K})$.

I punti impropri di $\tilde{V}(F)$ sono detti punti all'infinito della curva $V(f)$.

Esercizio.

$\mathcal{C}: y^2 - 3x^3 + 5 = 0$

eq. omogenea $\quad X_3 X_2^2 - 3X_1^3 + 5X_3^3 = 0$

punti impropri $\quad x_3 = 0$

$$3x_1^3 = 0$$

$$\Rightarrow [(0,1,0)]$$

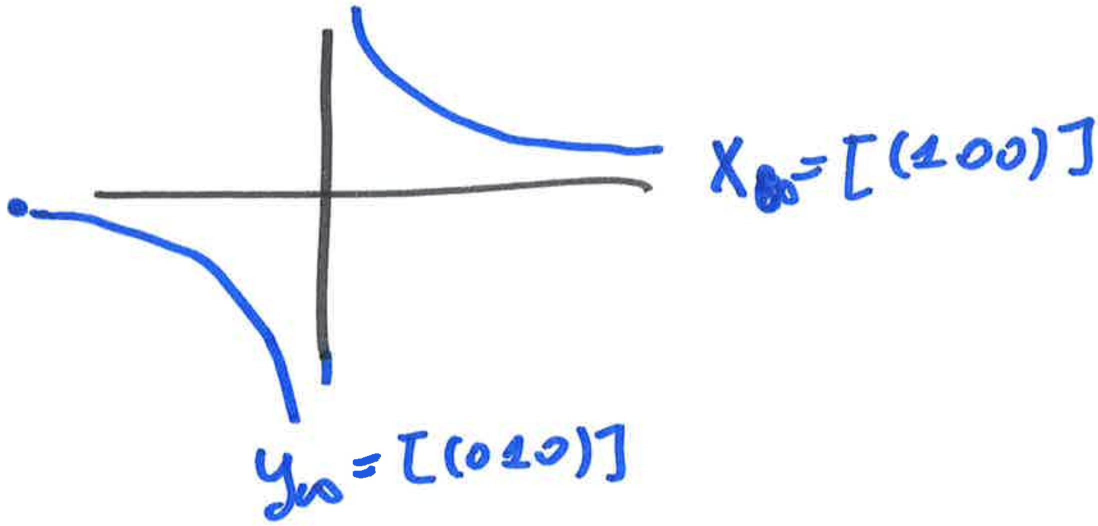
contato 3 volte perché l'eq. $x^3=0$ è di III grado.

$\mathcal{C}': \quad xy = 1$

eq. omogenea $\quad x_1 x_2 = x_3^2$

punti impropri $\quad \begin{cases} x_1 x_2 = x_3^2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{c} x_1 = 0 \\ \text{oppure} \\ x_2 = 0 \end{array}$

$[(1\ 0\ 0)] \qquad [(0\ 1\ 0)]$



NOTIAMO CHE SONO 2.

COME SI TROVANO?

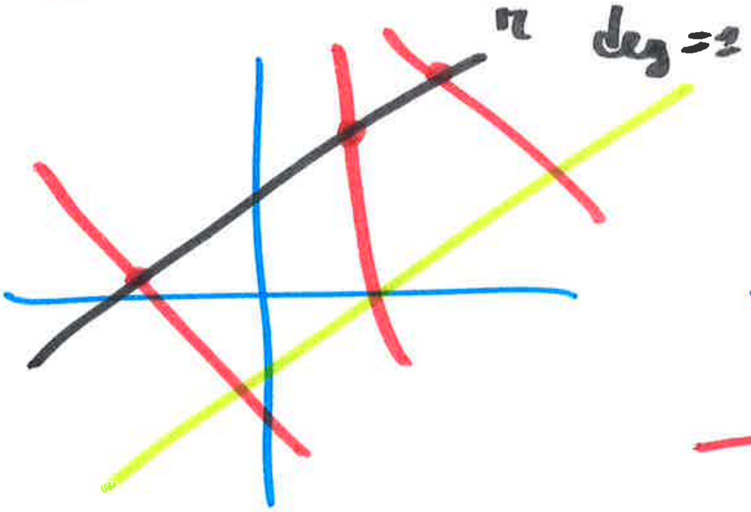
→ si prende l'eq. f si scrive l'eq. omogenea associata F e la si mette a sistema con $x_3 = 0$.

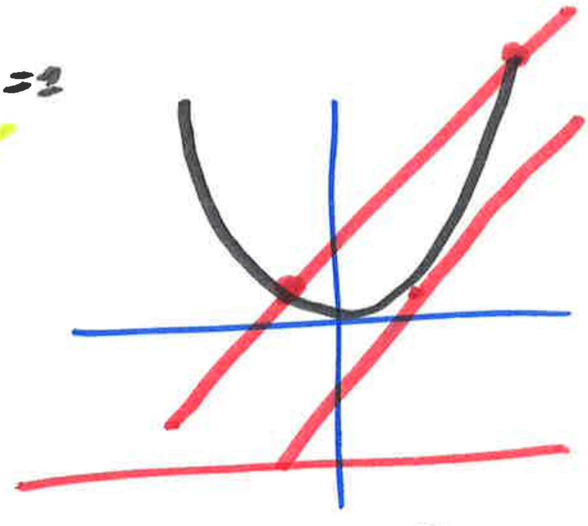
Sia $\mathcal{C}$ una curva algebrica di eq. $f(x,y)=0$ con $\deg f(x,y)=g$.

$\downarrow$

abbiamo che $F(x_1, x_2, x_3)$ ottenuto come prima è un polinomio omogeneo di grado g, ovvero in cui ogni monomio ha grado g

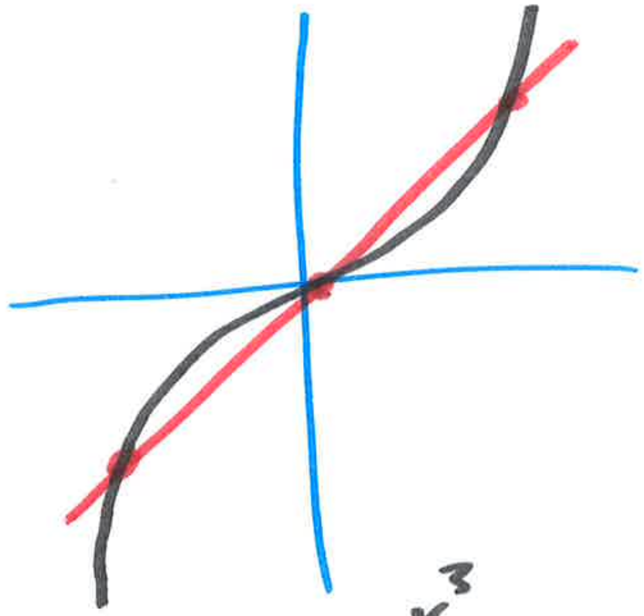
Intuitivamente il grado è legato alle prop. geometriche della curva.





$y = x^2$

$\deg f = 3$



$y = x^3$

Teorema (dell'ordine).

Sia $\mathcal{C} = V(f)$ una curva algebrica definita in $AG(2, \mathbb{K})$ da un polinomio di grado g.

Allora ogni retta di $\underline{PG(2, \overline{\mathbb{K}})}$ interseca $\mathcal{C}$ in esattamente g punti contati con la debita molteplicità. a meno che non sia $r \subseteq \mathcal{C}$.

Idea (non del tutto corretta) della dimostrazione.

$\mathcal{C}$: ha come punti quelli che soddisfano $f(x,y)=0$

una retta ha eq. del tipo

$$r: y = ax+b$$

(a meno che non sia parallela all'asse delle y).

per cercare le intersezioni sostituiamo y in f.

ed otteniamo

$$g(x) := f(x, ax+b)$$

se $g(x)\equiv 0 \Rightarrow \forall$ punto di r è contenuto in $\mathcal{C}$.

se $g(x)\not\equiv 0 \Rightarrow g(x)$ avrà grado g (o comunque $\leq g$) e dunque al più g soluzioni in $\mathbb{K}$.

se vogliamo che le abbia tutte dobbiamo sincerarci di star lavorando in un campo $\overline{\mathbb{K}}$ algebricamente chiuso.
(ad. es. la chiusura alg. di $\mathbb{K}$; se $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{K}}=\mathbb{C}$).

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ y=ax+b \end{cases} \longrightarrow g(x)=f(x,ax+b)=0$$

$\downarrow$

risolvo e trovo i punti

$\swarrow$

per poter risolvere mi serve $\overline{\mathbb{K}}$ alg. chiuso.

N.B non è detto che $g(x)$ abbia lo stesso grado di $f(x,y)$. potrebbe essere minore. $\to$ ci serve essere nel proiettivo.

$$\begin{cases} x = y^2 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow \text{intersezione}$$

$x = 1$

ne abbiamo uno!

$$\begin{cases} x = y^2 \\ y = x+1 \end{cases} \rightarrow$$

$x = (x^2+1)$

$x^2 - x + 1 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

In un campo alg. chiuso i punti ci sono.

$$\begin{cases} x = y^2 \\ y = x \end{cases} \rightarrow$$

$x = x^2$

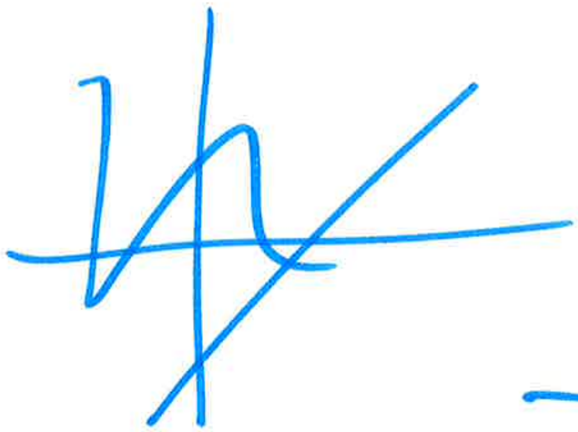
$x(1-x) = 0$

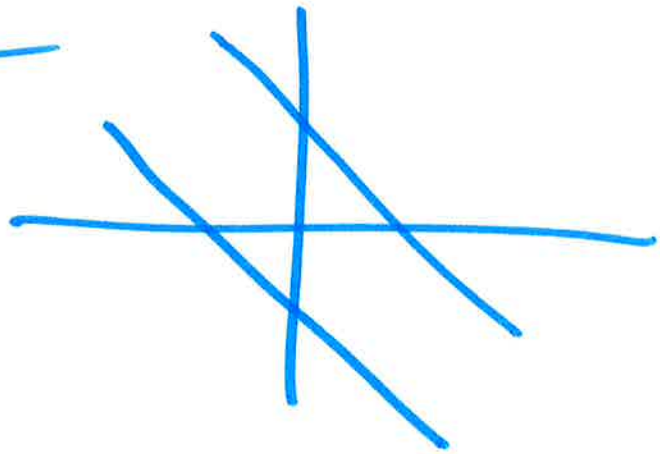
$x=1, y=1$

$x=0, y=0$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=3 \end{cases}$$ eq. 1 grado.

$3=2$
eq. di grado 0
non compat!





$$\begin{cases} x_1+x_2=2x_3 \\ x_1+x_2=3x_3 \end{cases}$$ a sistema.

$$[(1,-1,0)]$$