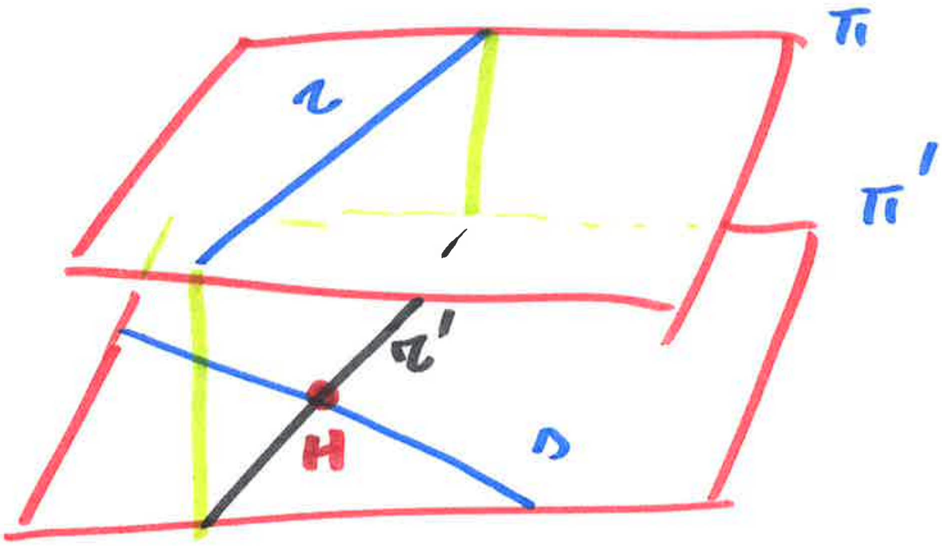
Distanza fra 2 sottospazi } DISGIUNTI
↓
distanza fra 2 insiemi

$$d(X, Y) := \min\{d(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

→ DISTANZA FRA 2 RETTE SGHEMBE.



$r = [P, U_1]$ $s = [Q, W_1]$

$\pi := [P, U_1 \oplus W_1]$ $\pi' = [Q; U_1 \oplus W_1]$

$r \subseteq \pi$ $s \subseteq \pi'$

$\pi // \pi'$

$d(r,s) \geq d(\pi, \pi')$ DIMOSTRIAMO CHE SONO UGUALI.

r' = proiezione ortogonale di r su π'

→ r' è l'intersezione di π' col piano ortogonale a π passante per r.

$$r' = \pi' \cap \underbrace{[P; U_1 \oplus (U_1 + W_1)^\perp]}$$

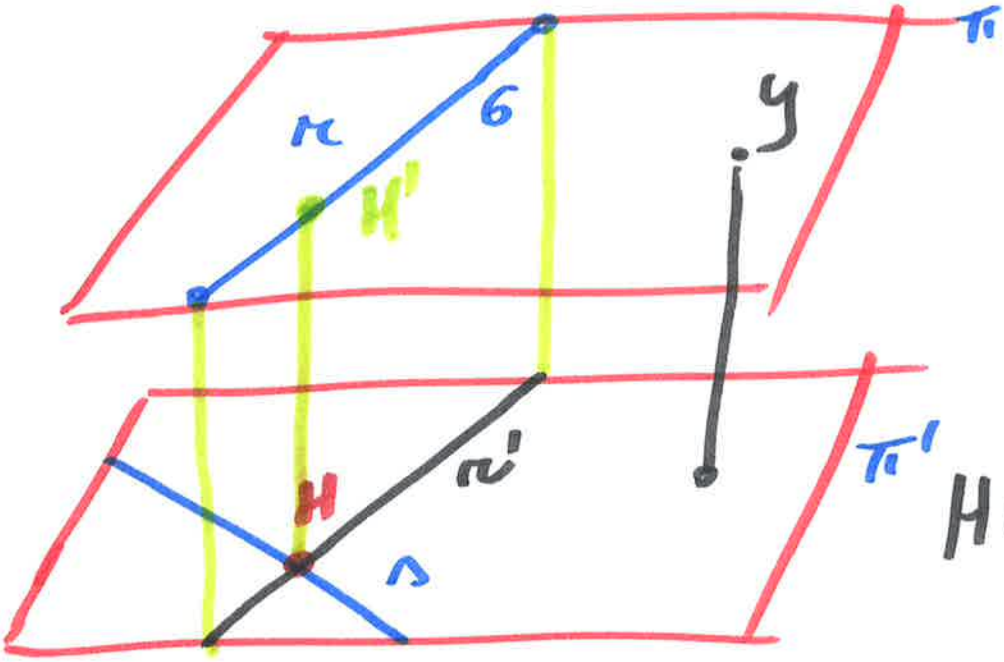
piano per r in quanto contiene $[P; U_1]$ ortogonale a π' in quanto la sua giacitura contiene $(U_1 \oplus W_1)^\perp$

per costruzione r' è parallela ad r

$$r' = [X; U_1 \oplus (U_1 + W_1)^\perp \cap (U_2 + W_1)]$$
$$= [X; U_1]$$

r' non è parallela ad s ⇒

⇒ r' interseca s in un punto H



$H \in s$

$$d(r, H) \geq d(r, s) \geq d(\pi, \pi')$$

ma $d(r, H) = d(\pi, \pi')$ perché se prendiamo la retta per H ortogonale a π', questa è contenuta nel piano per r ed H (per costruzione di questo piano) ed interseca r in un punto H' perché non è parallela ad r

$$d(r, H) = d(H, H') = d(\pi, \pi') \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d(r, s) = d(\pi, \pi').$$

N.B. La retta HH' è una retta che è ortogonale a π $\Rightarrow$ è ortogonale sia ad r che a s ed incidente entrambe.

$\downarrow$ si vede anche che essa è l'unica retta con tale proprietà e che i punti H ed H' sono quelli a minima distanza su s ed r.
$\rightarrow$ la retta HH' è detta retta di minima distanza fra r ed s.

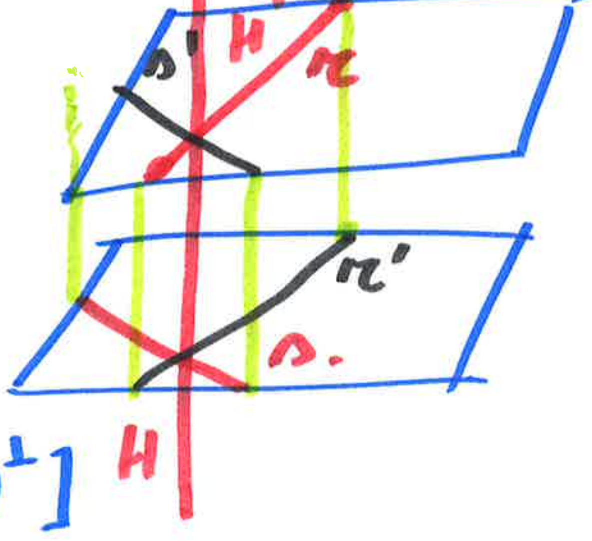
per calcolare la retta di minima distanza, $\Rightarrow$ calcolare la retta per H ortogonale a π!

oppure

$HH' =$

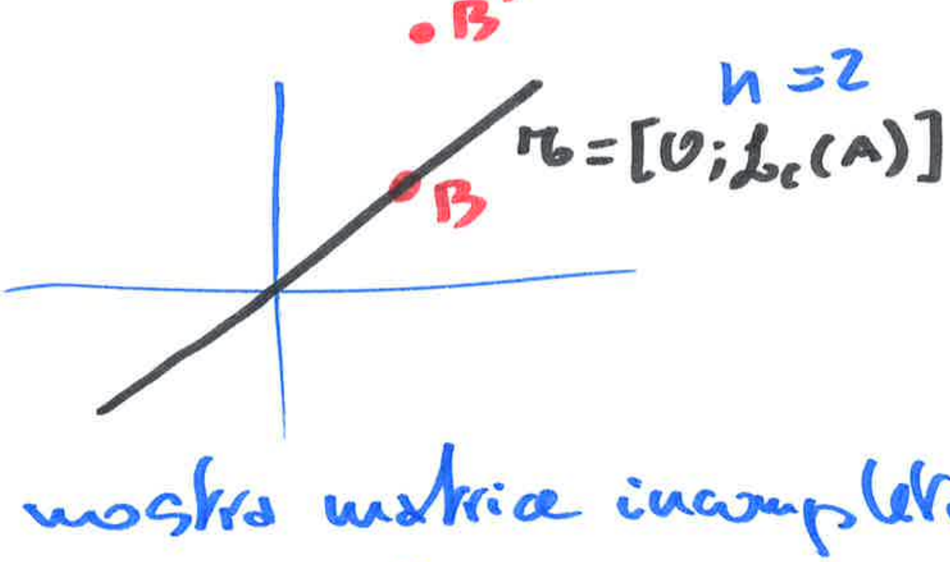
$[r; U_1 \oplus (U_1+W_1)^{\perp}]$

$\cap\ [s; W_2 \oplus (U_1+W_1)^{\perp}]$



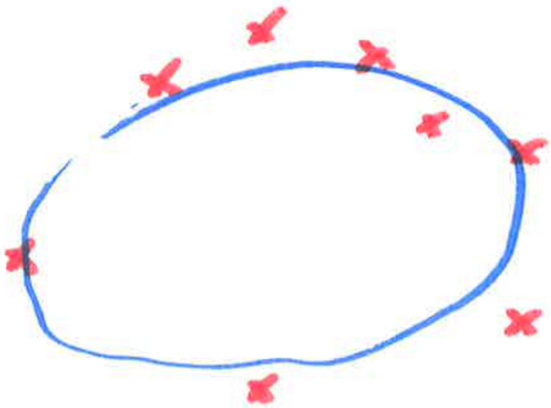
Risoluzione di sistemi lineari ai minimi quadrati.

Supponiamo $AX=B$ sistema lineare.
e consideriamo in $\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$
l'insieme di tutti i punti P
tali che il sistema lineare
$AX=B$ è compatibile
se e solo se B sono le coordinate
di P.



Sia A la nostra matrice incompleta
$AX=B$ compatibile $\Leftrightarrow B\in\mathcal{L}_c(A)$

$$\{P \mid \text{coord. di } P\in\mathcal{L}_c(A)\}=[\underline{0};\mathcal{L}_c(A)]$$



$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

$$\begin{array}{l|l}
P_1 = (x_1, y_1) & a_{11}x_1^2 + \dots + a_{33} = 0 \\
P_2 = (x_2, y_2) & a_{11}x_2^2 + \dots + a_{33} = 0 \\
\vdots & \vdots \\
P_n = (x_n, y_n) & a_{11}x_n^2 + \dots + a_{33} = 0
\end{array}$$

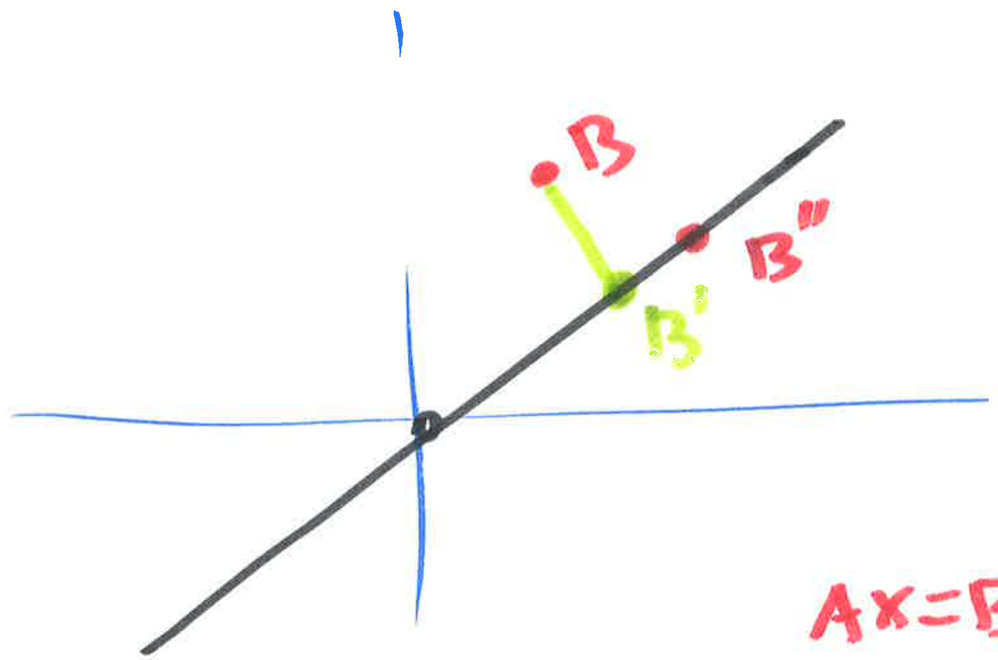
$\uparrow$

n equazioni in 6 incognite

sistema lineare omogeneo.

Se $a_{11} \neq 0 \to$ dividiamo per a_{11}

$\to$ n eq. in 5 incognite



$AX=B$

$B \notin R$

cerchiamo un sistema lineare che sia compatibile e che sia "vicino" a quello dato.

→ SOSTITUIAMO A $B \notin R$ un $B' \in R$ che sia a distanza minima da B.

Sostituire ad

$$AX=B \to AX=B'$$

con B' = proiezione ortogonale di B su $[O; \mathcal{L}_c(A)]$

→ risolvere il sistema ai minimi quadrati

$AX = B.$

vogliamo risolvere $AX = B'$
ove B' = proiezione ort. di B
su $\mathcal{L}_c(A)$.

cioè ove $\overrightarrow{BB'} \perp \mathcal{L}_c(A)$

cioè ove $(B'-B)$ è ortogonale
a tutte le colonne di A.

ovvero vale la condizione

$$(*) \quad \boxed{{}^tA(B'-B) = \underline{0}}$$

Sia X la soluzione che stiamo
cercando. $\Rightarrow$ $B' = AX$ quindi
sostituiamo in $(*)$

$$\boxed{{}^tA(AX-B) = \underline{0}}$$

X deve soddisfare
questo.

$$\boxed{{}^tAAX = {}^tAB}$$

e risolvo questo
sistema lineare!

Esempio.

$$AX = B$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

$${}^{t}A\, A\, X = {}^{t}A\, B$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$2x + 4y = 1$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} - 2y \\ y = y \end{cases}$$

In $A_2(\mathbb{K})$ o in $\mathcal{E}_2(\mathbb{K})$ si dice <u>curva algebrica</u> di equazione

$$f(x,y)=0$$

ove $f(x,y)$ è un polinomio a coeff. in $\mathbb{K}$ non costante l'insieme dei punti:

$$V(f):=\{P\in A_2(\mathbb{K}) \mid f(x_P,y_P)=0$$

ove (x_P,y_P) sono le coordinate di P rispetto un riferimento fissato$\}$.

1) La curva dipende dal riferimento?

[in $AG(2,\mathbb{K})$ usiamo il riferimento "naturale" ma altrimenti...].

SOSTANZIALMENTE NO.

2) Una curva è univocamente determinata dai suoi punti? Se $\mathbb{K}$ non è algebricamente chiuso, no!

In $\mathbb{A}^2(2, \mathbb{R})$

$$f(x,y) = x^2+y^2+1$$

$$V(f) = \phi$$

$$f(x,y) = x^2+y^2$$

$$V(f) = \{(0,0)\}.$$

—

$$f(x,y) = \underline{2x+y+1}$$

$V(f)$ e' una retta

$$f(x,y) = \underline{(x^2+y^2+1)(2x+y+1)}$$

$V(f)$ e' ancora una retta

ma l'eq. non é di primo grado.

$$f(x,y) = \underline{(2x+y+1)^2}$$

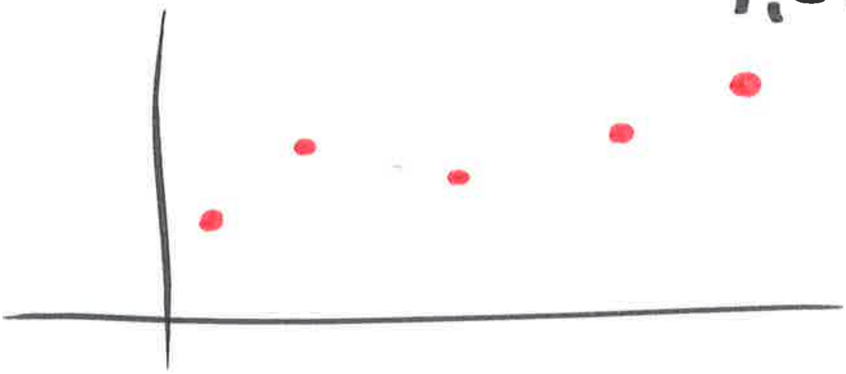
$V(f)$ é ancora una retta.

Def: Sia $f(x,y)=0$ un polinomio di grado n che definisce una curva algebrica $V(f)$.

Il grado n di $f(x,y)$ é detto <u>ordine</u> della curva $V(f)$.

Es. interpolazione polinomiale.

$P_i = (x_i, y_i)$.



volete trovare una equazione del tipo $y = f(x)$ che descriva le vostre osservazioni.

con $f(x)$ polinomio in x di grado $n \geq 1$

Impostiamo un sistema lineare.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

le incognite sono gli a_i (sono $n+1$)

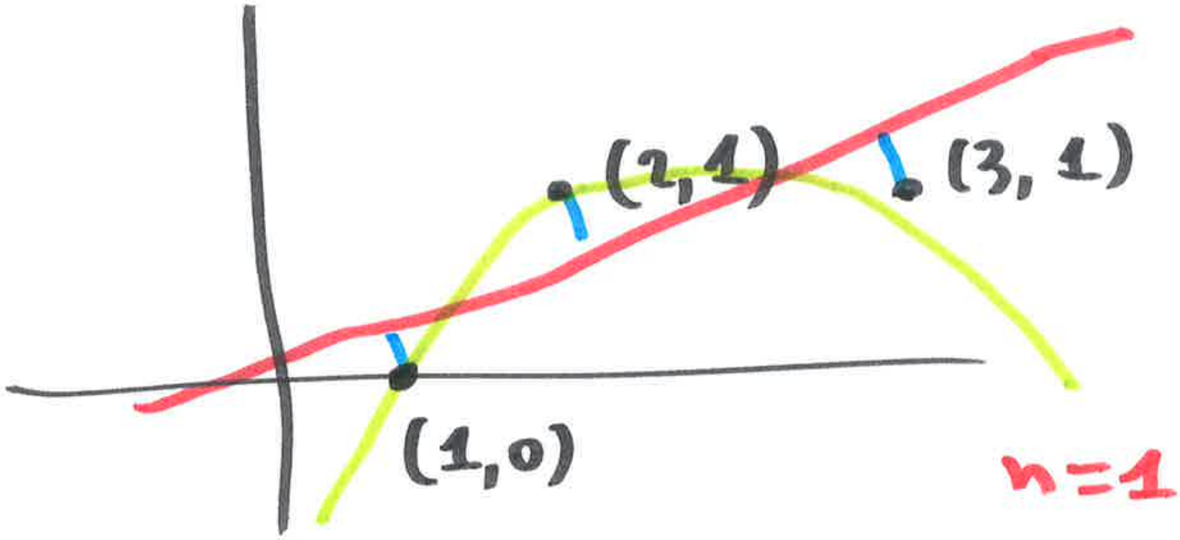
le oss. $y_i = f(x_i)$ sono quelle che determinano le eq. che devono essere soddisfatte.

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_2^n = y_2 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_t + a_2 x_t^2 + \dots + a_n x_t^n = y_t \end{cases}$$

$AX = B$ ove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_t & x_t^2 & \dots & x_t^n \end{pmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_t \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

N.B è possibile che il sistema ottenuto non abbia soluzione.



una retta per questi 3 punti non esiste.

→ potete in questo caso provare a risolvere ai minimi quadrati.

OTTENETE → regressione lineare

e la retta che si trova è

tale che $\sum_{i=1}^{3} d(P_i, r)^2$ sia minima.

Contesto in cui studiare le curve algebriche.

CURVE DEL I ORDINE.

$\downarrow$

curve algebriche che soddisfano equazioni del tipo $ax+by+c=0$ con $(a,b)\neq(0,0)$.

$\rightarrow$ RETTE NEL PIANO

Quante sono? ∞^2 infatti sono descritte da 3 parametri (a,b,c) ma parametri prop. descrivono la medesima retta e $(a,b)\neq(0,0)$

$\downarrow$

corrispondono a spazi vettoriali di $\mathbb{K}^3$ di dimensione 1 e differenti da $\mathcal{L}((0\,0\,1))$.

curve algebriche del II ordine
→ coniche.

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + a_{22}xy^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

eq. generica di II grado in x e y.

~~a_{11}, a_{12}, a_{22}~~ $(a_{11}\ a_{12}\ a_{22}) \neq (0\ 0\ 0)$

e poi il tutto a meno di coeff. di proporzionalità

In generale noi studiamo la geometria in ambito **ampliato** e **complessificato**.

↓ aggiungiamo dei punti alle geometria affine

↓ lavoriamo sulla chiusura algebrica di $\mathbb{K}$ (in particolare se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ → $\mathbb{C}$).

Ampliamento proiettivo.

Sia $A_n = (A, f : A \times A \to V_n(\mathbb{K}))$

uno spazio affine. $<$ punti / vettori.

chiamo gli elementi di A <u>punti propri</u> di $\widetilde{A_n(\mathbb{K})}$ e i

sottospazi 1-dimensionali di $V_n(\mathbb{K})$

<u>punti impropri</u> di $\widetilde{A_n(\mathbb{K})}$ e ta

indico il loro insieme con il

simbolo A_∞.

PUNTI IMPROPRI = DIREZIONI DELLE RETTE DI $A_n(\mathbb{K})$.

AD OGNI SOTTOSPAZIO

$\mathcal{G} = [P; W]$ di $A_n(\mathbb{K})$ associo il sottoinsieme

$\tilde{r} \subseteq A \cup A_\infty$ ove

$\tilde{r} = [P; W] \cup \{ U \leq W \mid \dim U = 1 \}$.

punti propri

punti impropri = direzioni delle rette contenute in $\tilde{r}$.

$n = 2$ → cosa succede.

$r = [P; W_1]$ $\tilde{r} = [P; W_1] \cup \{W_1\}$.

siano r, s due rette di $A_2(\mathbb{K})$

$r \cap s = \{P\} \Rightarrow r \not\parallel s$ $r = [P; W_1]$

$s = [P; U_1]$

$\tilde{r} \cap \tilde{s} = \{P\}$.

$r \cap s = r \Rightarrow \tilde{r} = [P; W_1] \cup \{W_1\} \Rightarrow \tilde{r} \cap \tilde{s} =$

$\tilde{s} =$ ↗ $\tilde{r}$.

$$r \cap s = \emptyset \Rightarrow r // s \qquad r = [P; \omega_1]$$
$$s = [Q; \omega_1]$$

$$\Rightarrow \tilde{r} = [P; \omega_1] \cup \{\omega_1\}.$$
$$\tilde{s} = [Q; \omega_1] \cup \{\omega_1\}.$$

$$\Rightarrow \tilde{r} \cap \tilde{s} = \{\omega_1\}.$$

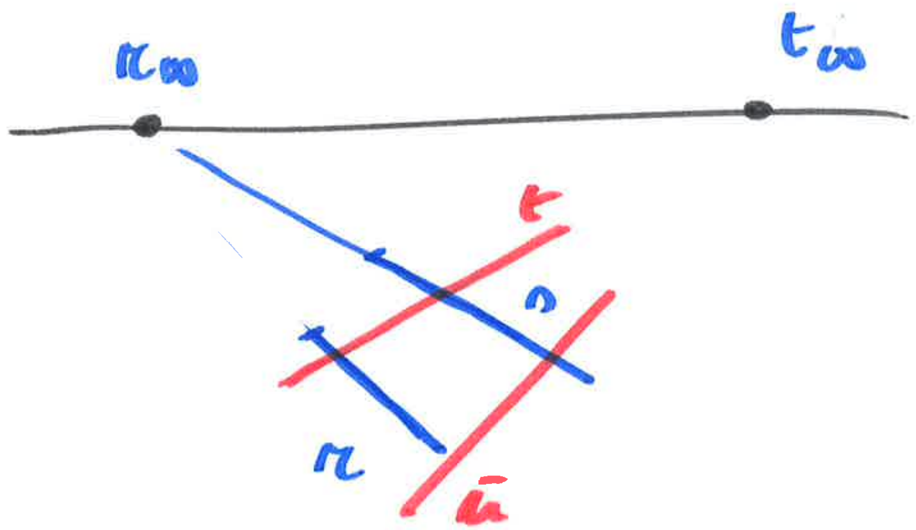
Due rette sono parallele $\Leftrightarrow$ si intersecano nel loro punto improprio.

In particolare 2 rette $\tilde{r}, \tilde{s}$ estese di $\widetilde{A_2(\mathbb{K})}$ si intersecano <u>sempre</u>

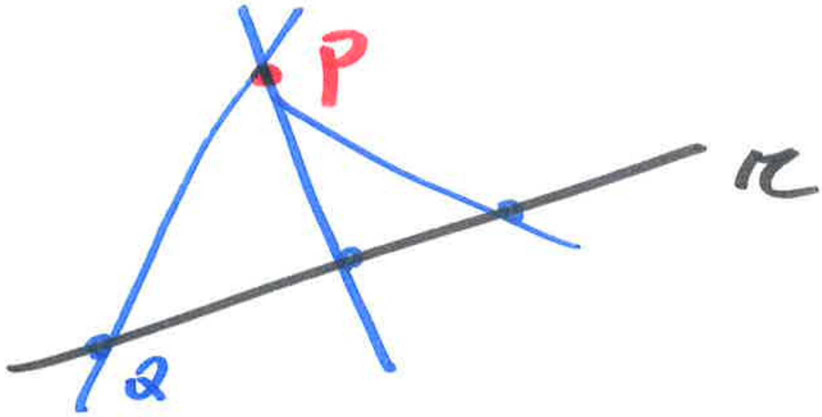
in un punto proprio se incidenti (o anche coincidenti)
in un punto improprio se parallele (coincidenti o distinte).

Il punto improprio corrisponde alla direzione delle rette

→ nell'ambito della prospettiva lo si disegna come il punto di fuga.



Due rette ~~[illegible]~~ nel piano si intersecano sempre.
Se sono parallele si intersecano "all'infinito".



c'è una corrispondenza 1-1 fra le rette del fascio di centro P ed i punti di $\tilde{r}$

$\forall Q \in r_0 \; \exists! \, s$ con $P, Q \in s$

ATT. in questo modo trovate $\forall$ le rette del fascio per P tranne la retta per P parallela ad r.

In generale però $\forall$ retta per P interseca $\tilde{r}$ $<$ se non è $/\!/ r \rightarrow Q \in r$; se è parallela ad $r \rightarrow$ in $r_\infty \in \tilde{r}$