Geometria Euclidea.

$$\mathcal{E}_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R}) = (A, f : A \times A \to V_n(\mathbb{R}))$$

Geometria Affine + Spazio vettoriale di traslazione Euclideo.

→ Introduciamo una nozione di distanza fra punti (spazio metrico) ma anche quella di angolo (ortogonalità) fra direzioni.

Def di distanza su di un insieme A

$$d : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}^+ := \{ r \geq 0 \mid r \in \mathbb{R} \}.$$

che gode delle seguenti 3 proprietà.

1) $d(a,b) \geq 0$, $d(a,b) = 0 \iff a = b$
2) $d(a,b) = d(b,a)$
3) $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$.

In $\mathbb{R}^2$ le seguenti funzioni sono distanze $\bar{a} = (x_1, y_1), \underbrace{(x_2\, y_2)}_{= \bar{b}} \in \mathbb{R}^2$

$$d_E(\bar{a}, \bar{b}) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \|\bar{a} - \bar{b}\|$$

$$d(\bar{a}, \bar{b}) = \max\left(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2| \right).$$

$$d(\bar{a}, \bar{b}) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

$$\cancel{d_H(\bar{a}, \bar{b}) = \#\{i\}}$$

$$d_H(\bar{a}, \bar{b}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \bar{a} = \bar{b} \\ 1 & \text{se } x_1 = x_2 \ \& \ y_1 \neq y_2 \\ 1 & \text{se } x_1 \neq x_2 \ \& \ y_1 = y_2 \\ 2 & \text{se } x_1 \neq x_2,\ y_1 \neq y_2 . \end{cases}$$

In particolare in $\mathbb{K}^n$ possiamo definire la distanza di Hamming fra $(x_1 \text{—} x_n)$ e $(y_1 \text{—} y_n)$ come

$$\boxed{d_H((x_1 \text{—} x_n), (y_1 \text{—} y_n)) = \#\{i \mid x_i \neq y_i\}.}$$

Teorema: $d_H : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$

è una distanza.

DIM

- $d_H(\bar{x},\bar{y}) \geq 0$ e $d_H(\bar{x},\bar{y}) = 0$

  $\iff \forall i \ \ x_i = y_i \iff \bar{x} = \bar{y}$.

- $d_H(\bar{x},\bar{y}) = d_H(\bar{y},\bar{x})$

- $\bar{x} = (x_1 \text{ — } x_n)$

  $\bar{y} = (y_1 \text{ — } y_n)$

  $\bar{z} = (z_1 \text{ — } z_n)$

$$d_H(\bar{x},\bar{z}) = \#\{i \mid x_i \neq z_i\} =$$

$$= \#\{i \mid \cancel{x_i = y_i}, y_i \neq z_i\} +$$

$$\#\{j \mid x_j \neq y_j, \cancel{x_j \neq z_j}\} \leq$$

$$\leq \#\{i \mid y_i \neq z_i\} + \#\{j \mid x_j \neq y_j\} =$$

$$= d_H(\bar{y},\bar{z}) + d_H(\bar{x},\bar{y})$$

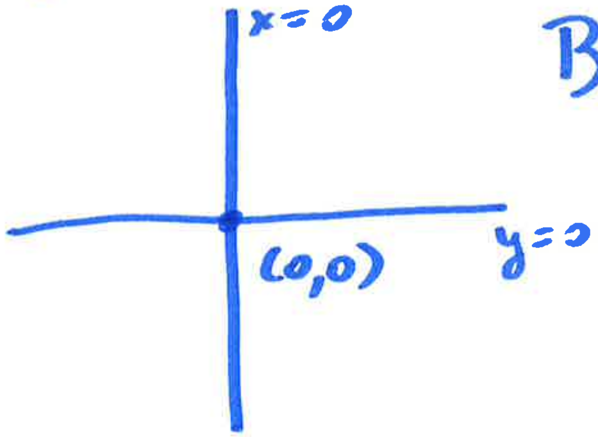
$\square$

N.B Se pongo

$$B_\delta(\bar{x}) := \{ \bar{y} \in \mathbb{K}^n \mid d(\bar{x},\bar{y}) \leq \delta \}.$$

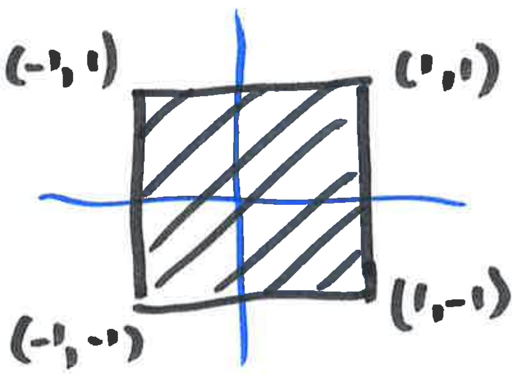
sfera di centro $\bar{x}$ e raggio δ.

come è fatta $B_\delta((0,0))$ in $\mathbb{R}^2$ rispetto d_H?

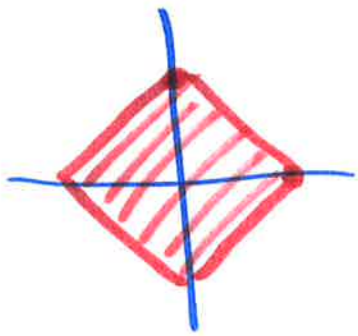


$B_1(\bar{0})$ = unione di 2 rette.

e rispetto $d(\bar{a},\bar{b}) = \max(|x_1-x_2|, |y_1-y_2|)$?



$d(a,b) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$



Geometria euclidea =
Geometria Affine + distanza euclidea data dalla funzione $\|\cdot\|$ su di uno spazio vettoriale $V_n^\circ(\mathbb{R})$ euclideo.

$$d(P,Q) := \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PQ}}$$

Verifichiamo che la distanza euclidea è una distanza.

$$d(P,Q) = 0 \iff \|\overrightarrow{PQ}\| = 0 \iff P = Q$$

perché il prod. scalare è definito positivo.

$$d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|-\overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{QP}\| = d(Q,P).$$

$$d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| \leq \|\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ}\| \leq \|\overrightarrow{PR}\| + \|\overrightarrow{RQ}\| = d(P,R) + d(R,Q)$$

(disuguaglianza triangolare). $\square$

Def: In $\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ si dice <u>riferimento Euclideo</u> un riferimento affine $\Pi = (O, \mathcal{B})$ in cui $\mathcal{B}$ è una base ortonormale rispetto il prod. scalare euclideo di $V_n^0(\mathbb{R})$.

$\rightarrow$ In particolare se $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 — \bar{e}_n)$ ortonormale

e $\bar{x} = \sum x_i \bar{e}_i$, $\bar{y} = \sum y_i \bar{e}_i \Rightarrow$

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \sum x_i y_i$$

Se P è il punto di coordinate $(x_1 — x_n)$ rispetto a Π

Q il punto di coordinate $(y_1 — y_n)$

$$\Rightarrow d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|(y_1 - x_1 \dots y_n - x_n)\| =$$

$$= \sqrt{\sum_i (y_i - x_i)^2}$$

Esempio: In $\mathcal{E}_2(\mathbb{R}) \overset{\text{p}}{\approx} EG(2,\mathbb{R})$

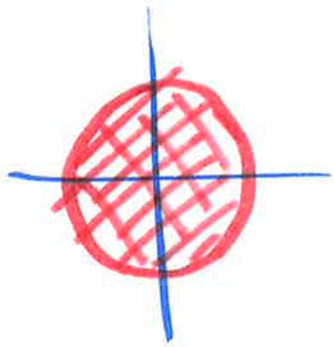
cioè $AG(2,\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^2, f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$

con prod. scalare std. su $\mathbb{R}^2$

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

$$B_1(\underline{0}) = \{(x,y) \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\} =$$

$$= \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}.$$



Definiamo dei luoghi geometrici.

→ Insieme dei punti a distanza fissata da un punto dato

$$S_\delta(P) = \{Q \mid d(P,Q) = \delta\}.$$

(Iper)sfera di centro P e raggio δ.

Def: Siano $P, Q \in \mathcal{E}_n(\mathbb{R})$.

Si dice punto medio fra P e Q il punto M tale che $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MQ}$.

OSS: $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MQ} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ} =$

$= 2\overrightarrow{PM} \Rightarrow \overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$ e

$$\boxed{M = P + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}}$$

Il punto medio è univocamente determinato.

Fissato Γ riferimento affine.

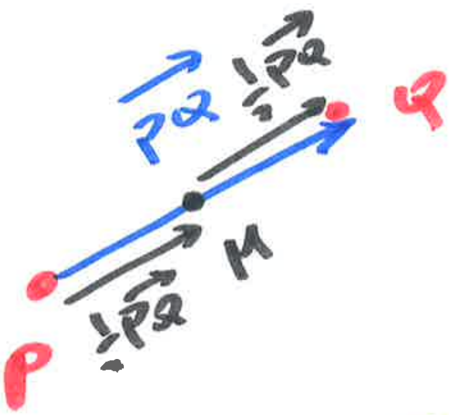
Se $P \equiv (x_1 \text{ — } x_n)$

$Q \equiv (y_1 \text{ — } y_n)$

$\Rightarrow M \equiv (x_1 \text{ — } x_n) + \frac{1}{2}(y_1 - x_1 \text{ — } y_n - x_n)$

$= \frac{1}{2}(x_1 + y_1 \text{ — } x_n + y_n)$.

le coord. del punto M sono la media delle coordinate di P e Q.



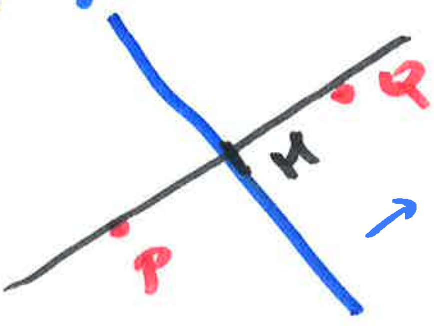
<u>N.B</u> $d(P,M) = \|\overrightarrow{PM}\| = \|\overrightarrow{MQ}\| = d(M,Q)$.

e $d(P,M) = \|\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ}\| = \frac{1}{2}d(P,Q)$.

<u>Def</u>: Siano $P, Q \in \mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ si dice <u>iperpiano assiale</u> (se $n=2$, <u>asse</u>; se $n=3$ <u>piano assiale</u>) il luogo dei punti $X \in \mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ equidistanti da P e da Q.

$$\{X \mid d(P,X) = d(Q,H)\}.$$

<u>Teorema</u>: L'iperpiano assiale fra P e Q è l'iperpiano $[M; \overrightarrow{PQ}^{\perp}]$



retta ortogonale a $\overrightarrow{PQ}$ passante per M.

Def: In $\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ siano

$$S=[P;\mathcal{U}] \text{ e } \mathcal{T}=[Q;W]$$

due sottospazi lineari.
Si dice che S è ortogonale a $\mathcal{T}$, in simboli $S \perp \mathcal{T}$
se $\mathcal{U} \subseteq W^{\perp}$ oppure $\mathcal{U}^{\perp} \subseteq W$.

OSS:

$$\mathcal{U} \subseteq W^{\perp} \iff W \subseteq \mathcal{U}^{\perp}$$
$$\mathcal{U}^{\perp} \subseteq W \iff W^{\perp} \subseteq \mathcal{U}$$

$S \perp \mathcal{T}$ se una delle 4 condizioni di cui sopra è verificata.

Esempio. In $\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$, siano

$$r=[P,\mathcal{U}_1] \text{ ed } s=[Q,W_1]$$

due rette $\Rightarrow$ $r \perp s \iff \mathcal{U}_1 = W_1^{\perp}$
(facendo i conti sulle dimensioni).

Se fissato un riferimento euclideo

$r_0 : ax+by+c=0$

$\Rightarrow$ s è ortogonale ad r_0

$\Leftrightarrow$ la direzione (l', m') di s

è ortogonale alla direzione

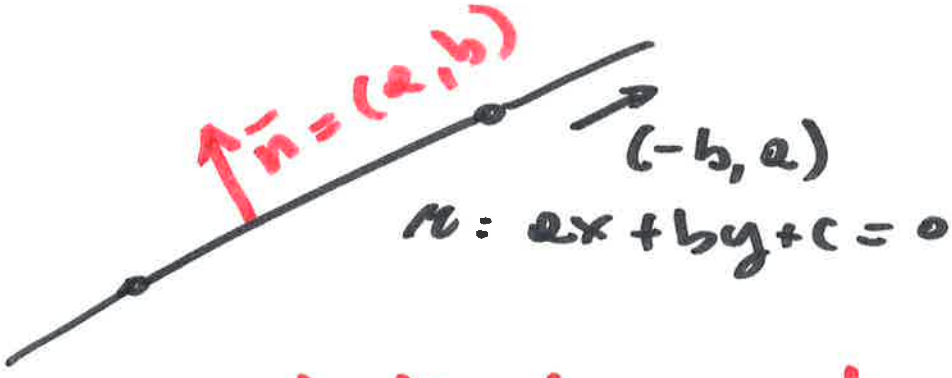
$(-b, a)$ di r_0 $\Leftrightarrow$

(l', m') è proporzionale ad (a, b)

$\Rightarrow$ la direzione di s è data

da $(a, b) = \bar{n}$

$\rightarrow$ $\bar{n}$ è detta **direzione normale** (o ortogonale) ad r_0.



lo spazio di traslazione di r è dato da $(a, b)^{\perp}$ e dunque l'ort. ad esso è

$$(a,b)^{\perp\perp} = \mathcal{L}((a,b)).$$

Similmente in $\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ dato un iperpiano di equazione

$$\pi: a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0$$

si ha che il sott. di traslazione di π è $(a_1 \dots a_n)^{\perp} = \{(v_1 \dots v_n) : a_1v_1 + \dots + a_nv_n = 0\}$.

$\Rightarrow$ il suo ortogonale è

$$(a_1 \text{---} a_n)^{\perp\perp} = \mathcal{L}((a_1 \text{---} a_n))$$

ed anche in questo caso si dice che $\bar{n} = (a_1 \text{---} a_n)$ è <u>normale</u> all'iperpiano π.

$n = 2, 3$

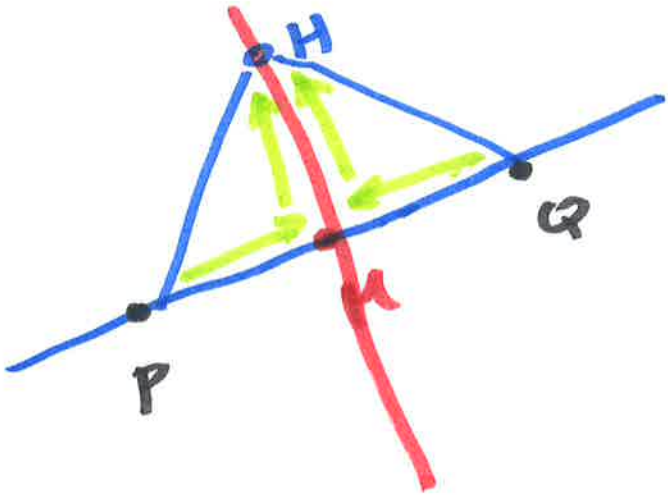
[le componenti dell'eq. omogenea associata all'iperpiano sono proprio le componenti di (un) vettore normale allo stesso!]

Teorema $(n=2)$:

Siano P, Q due punti distinti

$\Rightarrow$ l'asse fra P e Q è la retta passante per M e ortogonale a $\overrightarrow{PQ}$

DIM:



Innanzitutto: Sia t l'asse fra P e Q.

$\Rightarrow M \in t$ perché $d(P,M) = d(M,Q) = d(Q,M)$.

Sia adesso $H \in t$. Per ipotesi

$$d(P,H) = d(H,Q) \quad \text{ma}$$

$$\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MH}$$

$$\overrightarrow{QH} = \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{MH} = -\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MH}$$

$$\|\overrightarrow{PH}\|^2 = \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MH} + 2\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{MH} =$$

$$= \|\overrightarrow{PM}\|^2 + \|\overrightarrow{MH}\|^2 + 2\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{MH}$$

$$\|\overrightarrow{QH}\|^2 = \|\overrightarrow{PM}\|^2 + \|\overrightarrow{MH}\|^2 - 2\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{MH}$$

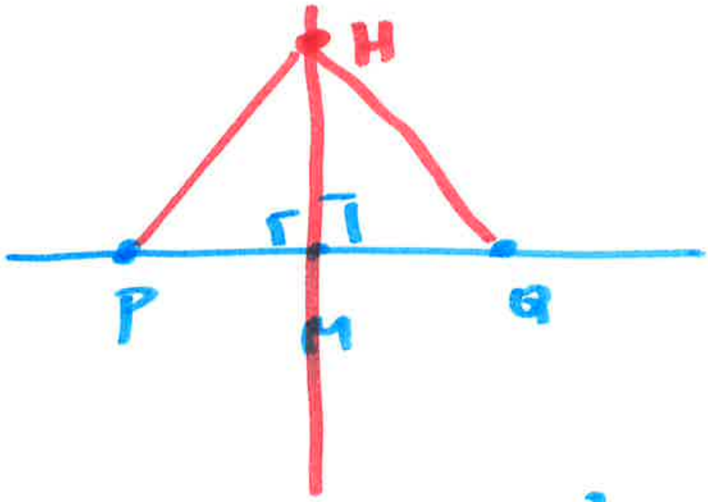
$$\|\overrightarrow{PM}\|^2 \pm \|\overrightarrow{QH}\|^2 \iff$$

$$\hookrightarrow \overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{MH} = 0 \iff \overrightarrow{PM} \perp \overrightarrow{MH}$$

$$\Rightarrow H \in [M, \overrightarrow{PQ}^{\perp}] \qquad t \subseteq [M, \overrightarrow{PQ}^{\perp}]$$

in quanto $\overrightarrow{PM}^{\perp} = \overrightarrow{PQ}^{\perp}$

Viceversa, supponiamo $H \in [M, \overrightarrow{PQ}^{\perp}]$



$$\Rightarrow \|\overrightarrow{PH}\|^2 = \|\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MH}\|^2 =$$

$$\|\overrightarrow{PM}\|^2 + \|\overrightarrow{MH}\|^2 =$$

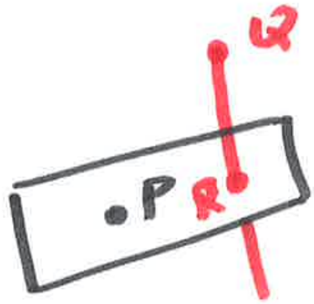
$$= \|\overrightarrow{QM}\|^2 + \|\overrightarrow{MH}\|^2 = \|\overrightarrow{QH}\|^2$$

$$\Rightarrow [M; \overrightarrow{PQ}^{\perp}] \subseteq t$$

$\square$

Lemma Siano $[P;W]$ uno spazio lineare e $Q \in \mathcal{E}_n(\mathbb{R})$.

$\Rightarrow [P;W] \cap [Q;W^\perp] = \{R\}$.



DIM: Consideriamo $[P;W]$ e $[Q;W^\perp]$

NOI SAPPIAMO CHE $W \oplus W^\perp = V_n^\circ(\mathbb{R})$.

$\Rightarrow$ in particolare $\overrightarrow{PQ} \in W \oplus W^\perp$

e $\overrightarrow{PQ}$ si scrive in modo unico come somma di due vettori $\bar{v}_1 \in W$ e $\bar{v}_2 \in W^\perp$.

pongo $R_0 = P + \bar{v}_1$ e $R' = Q - \bar{v}_2$

$$\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{R'Q} = \overrightarrow{PQ} \qquad Q = R' + \bar{v}_2$$

inoltre $R \in [P;W]$ e $R' \in [Q;W^\perp]$

$$\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \overrightarrow{PQ}$$

$$\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{R'Q} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$$ per costruzione di R'. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \overrightarrow{R'Q} = \overrightarrow{RQ} \Rightarrow R = R' \Rightarrow$$

$$R = R' \in [P; W] \cap [Q; W^{\perp}]$$

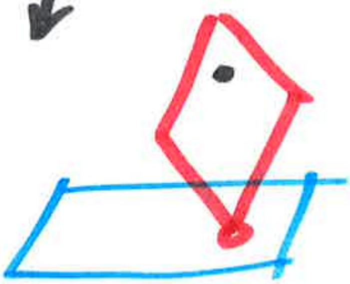
Se $R, S \in [P, W] \cap [Q; W^{\perp}]$ con $R \neq S \Rightarrow \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ} =$

$$= \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SQ}$$ con

$\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS} \in W$ e $\overrightarrow{PR} \neq \overrightarrow{PS}$

$\overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{SQ} \in W^{\perp}$

$\Rightarrow$ la somma $W + W^{\perp}$ non sarebbe diretta perché il vettore $\overrightarrow{PQ}$ si scriverebbe in 2 modi differenti ↯ $\square$.



Definizione.

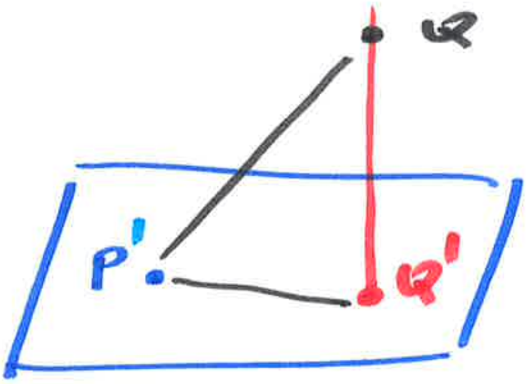
Sia $S = [P;W]$ un sottospazio lineare di $\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ e $Q \in \mathcal{E}_n(\mathbb{R})$.

Si dice proiezione ortogonale di Q su S il punto $Q' = S \cap [Q; W^\perp]$.

Teorema: La proiezione ortogonale Q' di Q su $S = [P;W]$ è il punto di S più vicino a Q.

$$\forall P' \in [P;W] \quad d(P',Q) \geq d(Q',Q).$$

DIM



$$\|\overrightarrow{QP'}\|^2 = \|\overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{Q'P'}\|^2 = \overrightarrow{QQ'} \cdot \overrightarrow{QQ'} + 2\,\overrightarrow{QQ'} \cdot \overrightarrow{Q'P'} + \overrightarrow{Q'P'} \cdot \overrightarrow{Q'P'}$$

$= 0$ perché $\overrightarrow{QQ'} \in W^\perp$, $\overrightarrow{Q'P'} \in W$

$$= \|\overrightarrow{QQ'}\|^2 + \|\overrightarrow{Q'P'}\|^2 \geq \|\overrightarrow{QQ'}\|^2$$

con uguaglianza $\iff Q' = P'$ $\square$

Def: Sia $\mathcal{S}=[P;W]$ un sottospazio lineare di $\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$ e $Q\in\mathcal{E}_n(\mathbb{R})$.
Si dice distanza fra Q ed $\mathcal{S}$ il valore

$$\boxed{d(Q;\mathcal{S})=\min\{d(Q,P')\,|\,P'\in\mathcal{S}\}}$$

OSS: $d(Q,\mathcal{S})=d(Q,Q')$ ove Q' è la proiezione ortogonale di Q su $\mathcal{S}$.

N.B. La "distanza" punto/sottospazio non è una distanza!

calcolare la distanza punto/retta nel piano

$d(P,P')$

distanza punto/iperpiano

OSS: $d(P, \mathcal{S})$ con $\mathcal{S} = [Q; W]$

è $= 0 \iff$ P coincide con la sua proiezione ortogonale su $\mathcal{S} \iff P \in \mathcal{S}$.

<u>Teorema</u> (dimostra per $n=2$, vale in generale; provate per $n>2$).

Formula della distanza punto/iperpiano.

$P = (p_1 \text{——} p_n) \in \mathcal{E}_n(\mathbb{R})$.

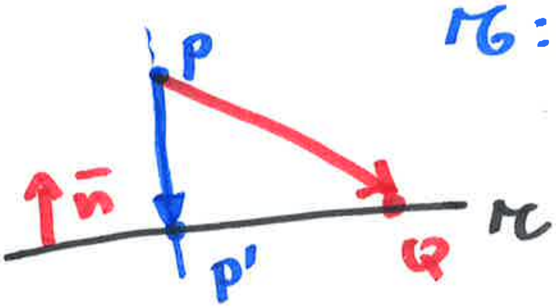
π: iperpiano di eq.

$a_1 x_1 + \text{——} + a_n x_n + b = 0$

$$\boxed{d(P, \pi) = \frac{|a_1 p_1 + \text{——} + a_n p_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}}.$$

<u>DIM</u> $n=2$ $\quad P = (x_1, y_1)$

$r: ax + by + c = 0$



$$\boxed{\overrightarrow{PP'} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \bar{n}}{\bar{n} \cdot \bar{n}} \bar{n}}$$

Sia $Q \in r$ di coordinate

$Q = (x_2, y_2) \Rightarrow$

$$a x_2 + b y_2 + c = 0$$

$$\boxed{c = -a x_2 - b y_2} \qquad \bar{n} = (a, b)$$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = \left((x_2 - x_1), (y_2 - y_1)\right) \cdot (a, b)$$

$$= a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) =$$

$$= \boxed{a x_2 + b y_2} - a x_1 - b y_1 =$$

$$= \underline{-a x_1 - b y_1 - c}$$

NON DIPENDE DA Q

$$\left\| \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{\bar{n} \cdot \bar{n}} \cdot \bar{n} \right\| = \left\| \frac{-a x_1 - b y_1 - c}{a^2 + b^2} (a, b) \right\| =$$

$$= \frac{|a x_1 + b y_1 + c|}{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + b^2} =$$

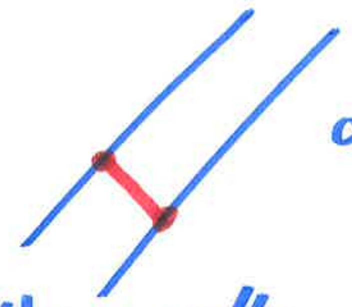
$$= \frac{|a x_1 + b y_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \square$$

$n=2$: distanza punto/punto

distanza punto/retta.

distanza retta/retta?

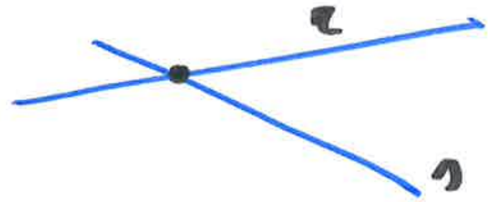
se $r // s \Rightarrow d(r,s) = \min\{d(P,Q) \mid P \in r, Q \in s\}$.



$d(r,s) = d(r,Q)$ con $Q \in s$.

inoltre $r // s$, $d(r,s) = 0 \Rightarrow r = s$.

se $r \cap s = \{P\}$. non parliamo di distanza fra r ed s.



In generale considereremo la distanza fra sottospazi di dim ≥ 1 solo quando sono disgiunti

$$d(\mathcal{S},\mathcal{T}) = \min\{d(S,T) \mid S \in \mathcal{S}, T \in \mathcal{T}\}.$$

$\underline{n=3}$ $\quad P=(x_1, y_1, z_1) \quad Q=(x_2, y_2, z_2)$.

- distanza punto/punto.

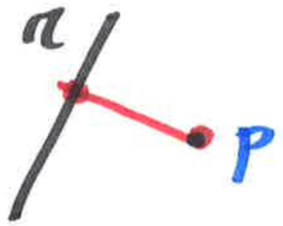
$$d(P,Q)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

- distanza punto/piano.

$\pi: ax+by+cz+d=0$

$$d(P,\pi)=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

- distanza punto/retta.



è la distanza di P da r nell'unico piano contenente r passante per P

Conviene calcolare il piano per P ortogonale ad r; intersecare con r e poi fare la distanza punto/punto.

Esercizio

$$r \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x = 3 \end{cases} \qquad P = (1\ 0\ 1)$$

calcolare la distanza $d(P, r)$.

$$r: \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 + t \\ z = t \end{cases} \qquad \text{param. direttori } \boxed{(0, 1, 1)}$$

piano per P ortogonale a $(0\,1\,1)$

$$\boxed{0} \cdot (x-1) + \boxed{1} \cdot (y-0) + \boxed{1} \cdot (z-1)$$

$$\pi : y + z - 1 = 0$$

interseco r con π.

$$\begin{cases} x = 3 \\ y - z = -2 \\ y + z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 + z \\ -2 + 2z = 1 \end{cases}$$

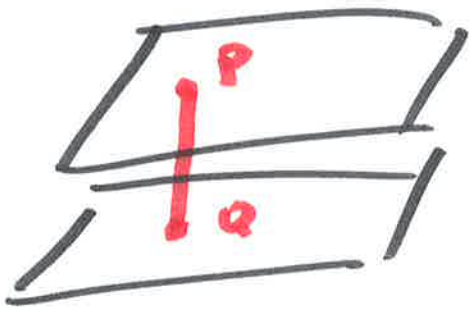
$$z = \frac{3}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}$$

$$d\left((1\,0\,1), \left(3, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right) = \ldots$$

• distanza piano/piano.

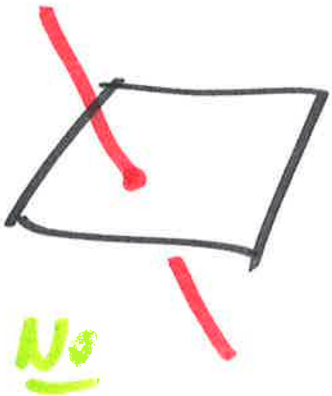
↳ solo se i piani sono paralleli (e quindi coincidono o sono disgiunti).

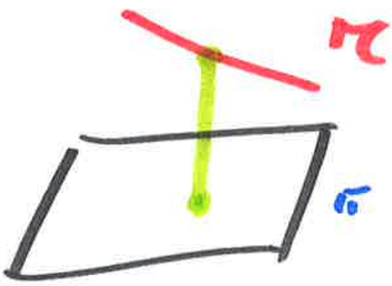


distanza $d(\pi, \sigma) = d(P, \sigma)$ ove P è un qualsiasi punto di π.

• distanza piano/retta.

↳ solo se sono paralleli.





$d(\pi, r) = d(\pi, P)$ con $P \in r$.

• distanza retta/retta. (r, s)

↳ se r ed s si intersecano in un punto → <u>NON DEFINITA</u>

↳ se $r // s \Rightarrow d(r,s)$ è definita e $d(r,s) = d(r,P)$ con $P \in s$.

↳ se $r \cap s = \phi$ ed r, s sghembe.

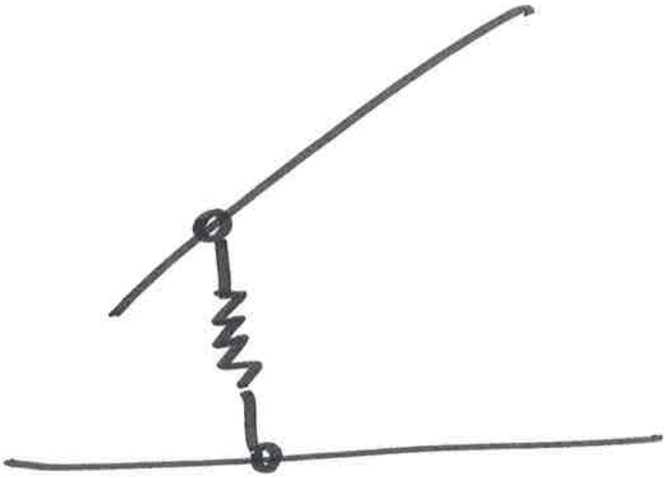
$d(r,s) = \min\{d(P,Q) \mid P \in r, Q \in s\}$.

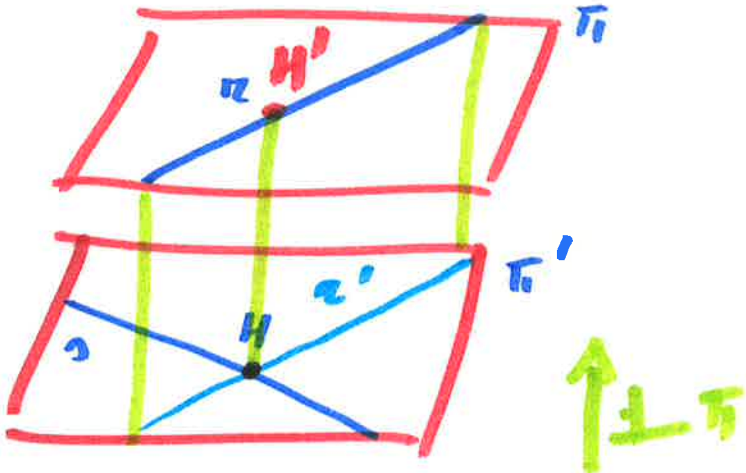
è definita.

Quanto vale?

Teorema: Siano r, s due rette sghembe in $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$.
Allora esiste un'unica retta t ortogonale sia ad r che ad s ed incidente entrambe.

I punti di intersezione fra t ed r e t ed s sono i 2 punti a distanza minima fra r ed s. e la retta t è detta retta di minima distanza fra r ed s.





$r' \parallel r$

$r' \subseteq \pi'$

$r' \cap s = \{H\}$

$$d(H, r) = d(H, \pi) = d(\pi, \pi')$$

è sicuramente la più piccola distanza possibile fra un punto di r e un punto di s.