Geometria affine

- l'insieme delle soluzioni di un sistema $AX = B$ lineare con ∞^1 soluzioni $\rightarrow$ retta
- idem con ∞^2 soluzioni $\rightarrow$ piano

etc.

$\rightarrow$ posizioni reciproche di 2 sottospazi lineari si studiano studiando il sistema lineare che emerge dal considerare le loro eq. tutte insieme.

$\rightarrow$ bisogna prestare attenzione a quando il sistema è incompatibile

Fasci
- di rette in $AG(2, \mathbb{K})$
- di piani in $AG(3, \mathbb{K})$

∞^1 oggetti

che nascono dalla comb. lineare di 2 equazioni indipendenti

- Fascio proprio di rette in $AG(2, \mathbb{K})$

$r: ax+by+c=0$

$s: a'x+b'y+c'=0$

retta generica $\alpha(ax+by+c)+\beta(a'x+b'y+c')=0$

$(\alpha,\beta)\neq(0,0)$

Fascio proprio di piani in $AG(3, \mathbb{K})$

$\pi: ax+by+cz+d=0$

$\sigma: a'x+b'y+c'z+d'=0$

piano generico

$\alpha(ax+by+cz+d)+\beta(a'x+b'y+c'z+d')=0$

$(\alpha,\beta)\neq(0,0)$.

Fascio improprio di rette in $AG(2,\mathbb{K})$.

$$r: ax+by+c=0$$
$$s: ax+by+c'=0$$

retta generica

$$\alpha(ax+by+c)+\beta(ax+by+c')=0$$
con $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$

cioè $(\alpha+\beta)(ax+by)+\alpha c+\beta c'=0$

cioè $\boxed{ax+by+\xi=0}$

$$\xi=\frac{\alpha c+\beta c'}{\alpha+\beta}$$

Fascio improprio di piani

$$\pi: ax+by+cz+d=0$$

$$\sigma: ax+by+cz+d'=0$$

pn. generico

$$\alpha(ax+by+cz+d)+\beta(ax+by+cz+d')=0$$
$(\alpha,\beta)\neq(0,0)$.

stesso discorso... $\boxed{ax+by+cz+\xi=0}$

stella $\left\langle \begin{array}{l} \text{di rette in } AG(3,\mathbb{K}) \\ \\ \text{di piani in } AG(3,\mathbb{K}) \end{array} \right]$ ∞^2 oggetti che nascono dalla c. lineare di 3 eq. linearmente indipendenti che soddisfano 1 cond. lineare.

equivalentemente

∞^2 $\left\langle \begin{array}{l} \text{rette} \\ \text{piani} \end{array} \right)$ che o passano per un punto fissato o hanno una direzione in comune.

propri

e

impropri

stella propria di piani

~~prani~~

$\forall$ piani per un punto.

(la cond. e' il passaggio per tale punto).

$$\pi : ax + by + cz + d = 0$$

passaggio per $P = (x_0, y_0, z_0) \Rightarrow$

$$d = -ax_0 - by_0 - cz_0$$

eq. generica piano della stella

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

→ stella impropria di piani

$$\pi: ax+by+cz+d=0$$

imponiamo $(l,m,n) \in$ giacitura di π.

$$\Rightarrow al+bm+cn=0$$

se $l \neq 0 \Rightarrow a=-\frac{bm+cn}{l}$

$\Rightarrow$ pn. generico

$$\frac{-bm-cn}{l}x+by+cz+d=0$$

$$(-bm-cn)x+bly+clz+dl=0$$

Se $\ell = 0$ allora $(m,n) \neq (0,0)$.

Supponiamo $\ell = 0$, $m \neq 0$

$\Rightarrow a \cdot 0 + b \cdot m + cn = 0$

$\Rightarrow b = -\frac{cn}{m} \Rightarrow$

eq. $ax - \frac{cn}{m} y + cz + d = 0$

$\sim \underline{a} m x - \underline{c} n y + \underline{c} m z + \underline{d} m = 0$

∞^3 sol. a meno di un coeff. di prop.

$a = 1,\ c = 0,\ d = 0 \Rightarrow x = 0$

$a = 0,\ c = 1,\ d = 0 \Rightarrow -ny + mz = 0$

$a = \frac{1}{m},\ c = 0,\ d = 1 \Rightarrow x + m = 0$ $m \neq 0$

$\ell = 0,\ m = 0,\ n \neq 0$

$cn = 0$ è la condizione $\Rightarrow c = 0$

$ax + by + d = 0$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x = -d \quad d \neq 0. \end{cases}$

Stella propria di rette → rette per un punto.

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

con $rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2$

$P=(x_0, y_0, z_0)$.

imponiamo il passaggio per P.

$$\Rightarrow \begin{cases} a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \\ a'(x-x_0)+b'(y-y_0)+c'(z-z_0)=0 \end{cases}$$

con $rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$.

"CONTIAMO" LE RETTE DI UNA STELLA PROPRIA.

preliminari: posizione reciproca di una retta ed un piano.

$r \begin{cases} \underline{\qquad} \\ \underline{\qquad} \end{cases}$ 2 eq. rk 2.

π piano $a''x+b''y+c''z+d''=0$

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \qquad (A|B)=\left(A \,\middle|\, \begin{matrix} d \\ d' \\ d'' \end{matrix}\right).$$

rk(A)	rk(A|B)	# sol	
2	2	∞^1	$r \subseteq \pi$
2	3	0	$r \parallel \pi$
3	3	1	$r \cap \pi = \{P\}$

Infatti $rk(A)=2 \Rightarrow$ le soluzioni

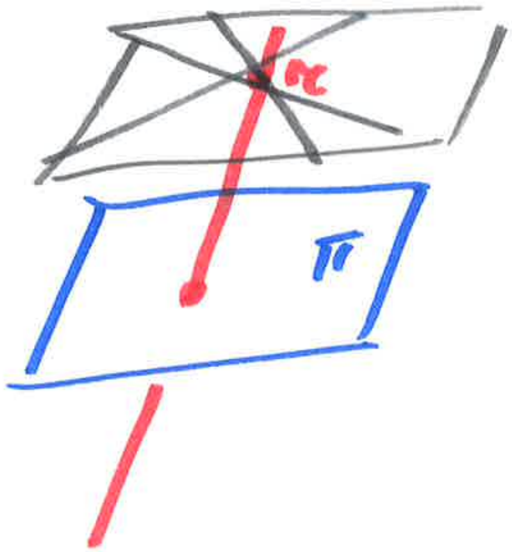
di $\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \end{cases}$ sono tutte anche

soluzioni di $a''x+b''y+c''z=0$

perché la III equazione è c-lineare

delle prime due $\Rightarrow$ la dir. della retta è

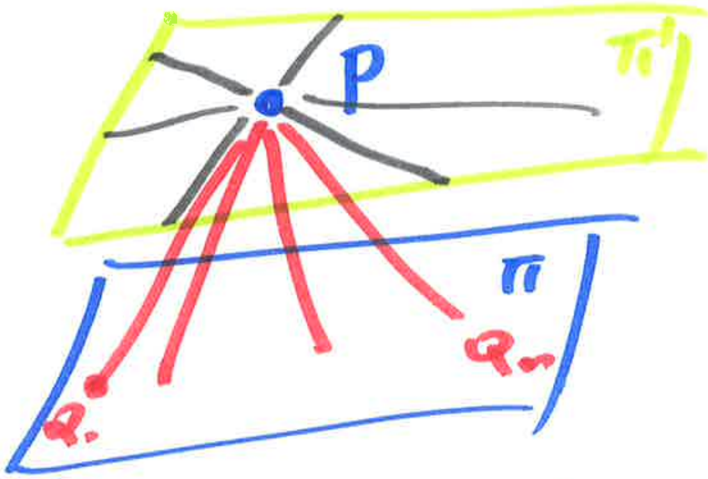
contenuta nella giacitura di π.
$\Rightarrow r // \pi$ $\square$



[Dato un piano π ed una retta $r \not\subseteq \pi$, allora o r è incidente π in esattamente 1 punto o r è parallela a π, cioè $r \subseteq \pi'$ piano parallelo a π passante per un suo qualsiasi punto.]

Rette di una stella propria di piani sono "$\infty^2 + \infty^1 \approx \infty^2$"

Sia P il centro della stella e π un piano che non passa per P.



Sia r una retta della stella.

$\Rightarrow$

- r è incidente π in un punto e $\forall$ punto di π c'è una retta per P ~~incidente~~ passante per esso. $\infty^2 \leftarrow$
- r appartiene al fascio di rette di centro P contenuto in π' piano parallelo a π per P. $\infty^1 \leftarrow$

$\Rightarrow$ ci sono tante rette nella stella quanti i punti di π + le rette di un fascio $\Rightarrow$

$$\infty^2 + \infty^1 = \infty^2$$

Condizioni di collinearità nel piano e complanarità nello spazio.

- Un insieme di punti $\{P_1 \ldots P_k\}$ è detto di punti <u>collineari</u> se essi appartengono ad una stessa retta.

<u>Complanari</u> se sono contenuti nel medesimo piano.

<u>N.B</u> Due punti sono sempre collineari e 3 punti sono sempre complanari!

Quando 3 punti distinti
$P = (x_0\ y_0)$
$Q = (x_1\ y_1)$
$R = (x_2\ y_2)$
sono collineari:

condizione $\dfrac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y_2 - y_0}{y_1 - y_0}$

$$\begin{vmatrix} x_2-x_0 & x_1-x_0 \\ y_2-y_0 & y_1-y_0 \end{vmatrix} = 0$$

cioè $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ sono vettori proporzionali.

$\Rightarrow$ la stessa condizione si scrive anche come

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\parallel$$

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1-x_0 & x_2-x_0 \\ y_0 & y_1-y_0 & y_2-y_0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1-x_0 & x_2-x_0 \\ y_1-y_0 & y_2-y_0 \end{vmatrix}$$

N.B Dall'eq. data abbiamo anche che la retta per P e Q si scrive come

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x \\ y_0 & y_1 & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(insieme dei punti collineari con P e Q).

DOMANDIAMOCI COME SCRIVERE LA RETTA PER P avente direzione $\mathcal{L}((l, m))$

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases} \quad t \in \mathbb{K}$$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & l \\ y - y_0 & m \end{vmatrix} = 0$$

è equivalente a

$$\begin{vmatrix} x_0 & l & x \\ y_0 & m & y \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Condizione di complanarità per 4 punti.

~~P=(x0~~ $P=(x_0\ y_0\ z_0)$

$Q=(x_1\ y_1\ z_1)$

$R=(x_2\ y_2\ z_2)$

$S=(x_3\ y_3\ z_3)$.

La condizione si ottiene ricavando i piani per P, Q, R e vedendo se S vi è contenuto.

Se per P, Q, R c'è più di un piano $\Rightarrow \exists$ sicuramente almeno un fascio di piani (P, Q, R sono allineati) $\Rightarrow$ S è complanare con P, Q, R.

Altrimenti si verifica con la eq.

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

eq. del piano per 3 punti non allineati

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x \\ y_0 & y_1 & y_2 & y \\ z_0 & z_1 & z_2 & z \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

come prima si verifica anche che se si vuole l'eq. del piano per P_0 di giacitura $\mathcal{L}((a\,b\,c),(d,e\,f))$ si ha

$$\begin{vmatrix} x_0 & a & d & x \\ y_0 & b & e & y \\ z_0 & c & f & z \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

perché
$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha a + \beta d \\ y = y_0 + \alpha b + \beta e \\ z = z_0 + \alpha c + \beta f \end{cases}$$

#

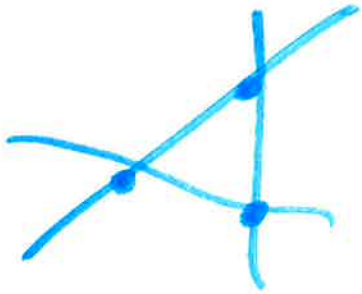
Def: Un insieme di t punti in $AG(n, \mathbb{K})$ é detto un insieme di punti <u>geometricamente indipendenti</u> se essi non sono contenuti in un sottospazio affine di dimensione $t-2$.

[ovvero il più piccolo sottospazio che li contiene ha dim $= t-1$ e si dice il <u>sottospazio affine generato da essi</u>].

Due punti nel piano sono indipendenti se sono diversi.

↓

generano una retta!



3 punti nel piano sono indip. se non sono allineati.

4 punti sono sempre dipendenti!

Nello spazio.

2 punti → indip. ⟺ distinti

3 punti → indip ⟺ non allineati

4 punti → indip. ⟺ non complanari

≥ 5 punti → sempre dipendenti.

N.B. In uno spazio affine di dimensione t il numero massimo di punti geometricamente indipendenti è $t+1$ e questi punti lo generano come spazio affine.

↓

esisterà forse un legame fra $AG(t, \mathbb{K})$ e lo spazio vettoriale $\mathbb{K}^{t+1}$??

(prossimamente ——).

Cambiamento di coordinate.

$$A_n^{(\mathbb{K})} = (A, f: A \times A \to \mathbb{K}^n)$$

$$\Gamma = (O, \mathcal{B})$$

$O \in A$, $\mathcal{B}$ base di $\mathbb{K}^n$

$$\psi_\Gamma : A \to \mathbb{K}^n \quad \text{coordinatizzazione}$$

$$\psi_\Gamma : A_n(\mathbb{K}) \to AG(n, \mathbb{K})$$

DOMANDA: COSA SUCCEDE SE CAMBIAMO RIFERIMENTO

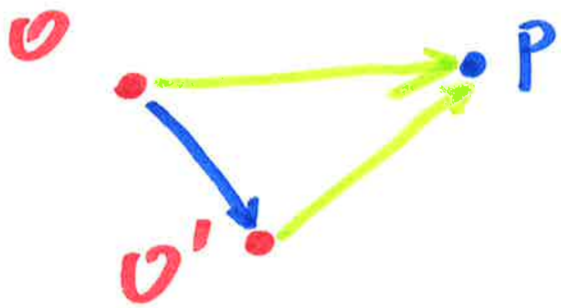
$$\Gamma = (O, \mathcal{B})$$

$$\Gamma' = (O', \mathcal{B}')$$

$$E' = T E$$

E': vettori di $\mathcal{B}'$

E: vettori di $\mathcal{B}$.



le coordinate di P in Γ sono le componenti del vettore $\vec{OP}$

$(p_1 — p_n)$ rispetto $\mathcal{B}$

e abbiamo $\vec{OP} = \sum p_i \bar{e}_i$

le coordinate di P in Γ' sono le componenti di $\vec{O'P}$ rispetto $\mathcal{B}'$

$\vec{O'P} = \sum p_i' \bar{e}_i'$ $\quad (p_1' — p_n')$.

scriviamo $\vec{OO'}$ rispetto $\mathcal{B}$.

$$\vec{OO'} = \sum o_i \bar{e}_i$$

$$\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P} \Rightarrow$$

$$\sum p_i e_i = \sum o_i \bar{e}_i + \sum p_i' \bar{e}_i' \Rightarrow$$

$$= \sum (p_i - o_i) \bar{e}_i = \sum p_i' \bar{e}_i'$$

$$(P_1 - O_1 \quad P_2 - O_2 \quad \cdots \quad P_n - O_n) E =$$

$$(P_1' \cdots P_n') E' = (P_1' \cdots P_n') T E$$

con T matrice di camb. di base.

e da questo

$$\begin{pmatrix} P_1 - O_1 \\ \vdots \\ P_n - O_n \end{pmatrix} = {}^tT \begin{pmatrix} P_1' \\ \vdots \\ P_n' \end{pmatrix}$$

e questo ci fornisce il legame fra le coordinate.

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} = {}^tT \begin{bmatrix} P_1' \\ \vdots \\ P_n' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O_1 \\ \vdots \\ O_n \end{bmatrix}$$

#