Geometria Analitica in $AG(n, \mathbb{K})$.

Insieme delle soluzioni di un sistema lineare $AX=B$ compatibile.

$$A_n = \left(A, f: A \times A \to V_n(\mathbb{K})\right)$$
$$\Gamma = (O, \mathcal{B}).$$

equazioni nelle coordinate dei punti.

- Sistema $AX=B$ di m equazioni in n incognite.

$$\mathcal{G} = \{P \in A \mid A\varphi_\Gamma(P) = B\}.$$

ove $\varphi_\Gamma : A \to \mathbb{K}^n$ è la funzione che associa ad ogni punto le sue coordinate rispetto a Γ.

I punti di $\mathcal{G}$ sono tutti e soli quelli le cui coordinate soddisfano il sistema $AX=B$. Sono tutti e soli quelli le cui coordinate sono della forma $X_0+\mathrm{Ker}(A)$

Le coordinate dei punti di $\mathcal{G}$ sono il sottospazio lineare di $AG(n,\mathbb{K})$ descritto da $[\underset{\substack{\uparrow\\ \text{origine}}}{X_0};\underset{\substack{\uparrow\\ \text{sott. di traslazione.}}}{\mathrm{Ker}(A)}]$

$\mathcal{G}$ é un sottospazio lineare di A_n.

Adesso lavoreremo direttamente in $AG(n,\mathbb{K})$.

osserviamo che il sottospazio di traslazione corrispondente all'insieme delle soluzioni di un sistema lineare $AX=B$

compatibile é Ker(A) cioé corrisponde all'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato. $Ax=\underline{0}$

$\lrcorner$

proprietà della geometria.

1) $\forall\, P, Q \in AG(n, \mathbb{K})$ $\exists!$ retta r con $P, Q \in r$.
$P \neq Q$

$$r := [P; \mathcal{L}(\overrightarrow{PQ})] \quad ; \ P, Q \in r,$$

se $s \ni P, Q \Rightarrow s = [P, \mathcal{L}(\bar{w})]$ con $\overrightarrow{PQ} \in \mathcal{L}(\bar{w})$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\bar{w}) = \mathcal{L}(\overrightarrow{PQ}) \Rightarrow s = r.$$

2) Nel piano 2 rette sono parallele $\Leftrightarrow$ sono disgiunte.

- Una retta nel piano $AG(2, \mathbb{K})$ é descritta da una equazione

$$ax + by = c \quad \text{con } (a, b) \neq (0, 0)$$

- 2 rette $\begin{array}{l} r: \\ s: \end{array}\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

sono disgiunte $\Leftrightarrow$ il sistema

$AX = B$ con $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$

é incompatibile $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $rk(A|B) = rk(A) + 1$

per Rouché Capelli.

ma $rk(A) \geq 1$

$1 \leq rk(A|B) \leq 2$

$\Rightarrow$ il sistema é incompatibile

$\Leftrightarrow$ $rk(A) = 1$ & $rk(A|B) = 2$

ma $rk(A) = 1$ significa che

$ax + by = 0$

e

$a'x + b'y = 0$

sono due equazioni proporzionali

$\Rightarrow$ hanno le stesse soluzioni

$\Rightarrow$ gli spazi di traslazione delle 2 rette sono uguali $\Rightarrow$ $r // s$. $\square$

In $AG(3,\mathbb{K})$ esistono rette che non si intersecano e non sono parallele fra loro.

→ perciò 2 piani di $AG(3,\mathbb{K})$ o sono paralleli (e coincidenti oppure disgiunti) o si intersecano sempre in una retta.

DIM (posizione reciproca di 2 piani in $AG(3,\mathbb{K})$).

OSS: Un piano in $AG(3,\mathbb{K})$ è descritto da una equazione lineare del tipo $\pi: ax+by+cz=d$ $\quad (a,b,c)\neq(0\,0\,0)$

[In un verso, l'insieme delle soluzioni di quella eq. è un sottospazio lineare di $\dim = 3-1=2 \Rightarrow$ piano.

Viceversa dato un piano consideriamo

$$\pi=[P_0, \mathcal{L}(\bar{v},\bar{w})] \text{ con } \bar{V}=(v,\ v_2\ v_3)$$
$$\bar{w}=(w,\ w_2\ w_3)$$

$\Rightarrow$ i punti $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\pi$ devono essere tali che

rk = 2.

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} x-p_1 & v_1 & w_1\\ y-p_2 & v_2 & w_2\\ z-p_3 & v_3 & w_3\end{pmatrix}=2$$

cioè $\det\begin{pmatrix} x-p_1 & v_1 & w_1\\ y-p_2 & v_2 & w_2\\ z-p_3 & v_3 & w_3\end{pmatrix}=0$

ovvero

$$(x-p_1)\begin{vmatrix} v_2 & w_2\\ v_3 & w_3\end{vmatrix}-(y-p_2)\begin{vmatrix} v_1 & w_1\\ w_3 & w_3\end{vmatrix}+$$

$$+(z-p_3)\begin{vmatrix} v_1 & w_1\\ v_2 & w_2\end{vmatrix}=0$$

l'eq. è questa perché descrive proprio la condizione $\overrightarrow{PX}\in\mathcal{L}(\bar v,\bar w)$.]

posizione reciproca di 2 piani

$\pi: ax+by+cz=d$

$\sigma: a'x+b'y+c'z=d'$

DOBBIAMO STUDIARE I RANGHI DEL SISTEMA

$$AX = B$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} d \\ d' \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$rk(A)$	$rk(A\|B)$	# sol.	
1	1	∞^2	$\pi = \sigma$; $\pi // \sigma$
1	2	0	$\pi // \sigma$
2	2	∞^1	$\pi \cap \sigma = r$ $\uparrow$ retta.

in questo caso i sistemi (eq.) omogenei associati ai 2 piani hanno le stesse soluzioni $\Rightarrow \pi // \sigma$ perché hanno la stessa giacitura.

$rk(A) = 1 \Leftrightarrow \pi // \sigma$.

$rk(A) = 2 \Leftrightarrow \pi \cap \sigma = r$ retta.

Rette in $AG(3, \mathbb{K})$.

$$r = [P ; \mathcal{L}(\bar{v})] \qquad \bar{v} = (\ell, m, n) \neq (0,0,0)$$

eq. che descrivono r

$$\text{rk}\begin{pmatrix} x-p_1 & \ell \\ y-p_2 & m \\ z-p_3 & n \end{pmatrix} = 1$$

$$\downarrow$$

$$\frac{x-p_1}{\ell} = \frac{y-p_2}{m} = \frac{z-p_3}{n}$$

Una retta (∞^1 punti in $AG(3, \mathbb{K})$) è descritta da un sistema lineare di 2 equazioni in 3 incognite di rango 2 (compatibile!).

$$r : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases} \qquad \text{rk}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = \text{rk}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2$$

$$s = \begin{cases} ex + fy + gz = h \\ e'x + f'y + g'z = h' \end{cases}$$

$$\text{rk}\begin{pmatrix} e & f & g \\ e' & f' & g' \end{pmatrix} = \text{rk}\begin{pmatrix} e & f & g & h \\ e' & f' & g' & h' \end{pmatrix} = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ e & f & g \\ e' & f' & g' \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} d \\ d' \\ h \\ h' \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\boxed{AX=B}$$

r//s

$rk(A)$	$rk(A\|B)$	#sol	
2	2	∞^1	$r = s$
2	3	0	$r // s$, $r \cap s = \emptyset$
3	3	$\infty^0 = 1$	$r \cap s = \{P\}$.
3	4	0	$r \cap s = \emptyset$ ma $r \not\parallel s$.

r e s sono sghembe →

$rk(A)=2 \Rightarrow$ i sottospazi di traslazione delle 2 rette coincidono.

$\Rightarrow r // s$.

$3 = rk(A) < rk(A|B) = 4 \Rightarrow$ i sottospazi di traslazione sono diversi

Def: Due rette r ed s sono dette sghembe se non sono contenute in alcun piano.

Teorema: Date 2 rette r ed s sghembe si ha che $\exists$ esattamente 2 piani paralleli π e σ con $r \subseteq \pi$ ed $s \subseteq \sigma$.

1) Supponiamo $r // s \Rightarrow \exists$ un piano che contiene r ed s.

Infatti $r = [P; \mathcal{L}(\bar{v})]$

$s = [Q; \mathcal{L}(\bar{v})]$

se $r = s \Rightarrow$ prendiamo

$\pi = [P, \mathcal{L}(\bar{v}, \bar{w})]$ con

$\bar{w}$ qualsiasi vettore l. indip. da $\bar{v}$.

se $r \neq s \Rightarrow$ prendiamo

$\pi = [P, \mathcal{L}(\bar{v}, \overrightarrow{PQ})]$

oss. $r = [P, \mathcal{L}(\bar{v})] \subseteq [P, \mathcal{L}(\bar{v}, \overrightarrow{PQ})] = \pi$

poiché $Q \in \pi$ in quanto $Q = P + \overrightarrow{PQ}$

abbiamo anche che $\underset{\overset{\|}{s}}{[Q ; \mathcal{L}(\bar{v})]} \subseteq \pi$

Due rette parallele sono complanari (i.e. contenute in un medesimo piano).

2) Supponiamo ora $r \cap s = \{P\}$.

$\Rightarrow r = [P ; \mathcal{L}(\bar{v})], \; s = [P ; \mathcal{L}(\bar{w})]$

$\Rightarrow r, s \subseteq [P ; \mathcal{L}(\bar{v}, \bar{w})]$ con $\dim \mathcal{L}(\bar{v}, \bar{w}) = 2$

Due rette incidenti sono complanari.

Due rette sono sghembe <=> esse non sono parallele e non sono incidenti.

Infatti supponiamo $r = [P, \mathcal{L}(\bar{v})]$

$s = [Q, \mathcal{L}(\bar{w})]$ con $\mathcal{L}(\bar{v}) \neq \mathcal{L}(\bar{w})$

per ipotesi r ed s non sono incidenti e non sono parallele.

poiché in un piano 2 rette disgiunte sono necessariamente parallele ne segue che r ed s non possono essere contenute in un medesimo piano $\Rightarrow$ r ed s sono sghembe.

$$r \subseteq [P; \mathcal{L}(\bar{v}, \bar{w})] = \pi$$

$$s \subseteq [Q; \mathcal{L}(\bar{v}, \bar{w})] = \sigma$$

con $\pi // \sigma$.

Viceversa: se r ed s sghembe $\Rightarrow$ non incidenti e non parallele per 1) e 2). $\square$

Come costruire 2 rette sghembe in $AG(3, \mathbb{K})$?

prendere $P \in AG(3, \mathbb{K})$ punto e $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ vettori di $\mathbb{K}^3$ indipendenti:

considerate le rette

$$r = [P, \mathcal{L}(\bar{e}_1)] \quad s = [P+\bar{e}_2, \mathcal{L}(\bar{e}_3)]$$

Non esiste π con $r, s \subseteq \pi$ e π piano perché altrimenti $\pi = [P, W_2]$ con $\dim W_2 = 2$ ed $\bar{e}_1, \bar{e}_3, (P+\bar{e}_2)-P =$
$= \bar{e}_2 \in W_2$

e quindi W_2 dovrebbe avere dim ≥ 3 assurdo!

---

posizioni reciproche di 2 rette
di 2 piani.

posizioni reciproche di un piano ed una retta.

$$r: \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$$

$$rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = rk\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2$$

$$\pi : \{ a''x+b''y+c''z = d''$$

$rk(A)$	$rk(A\|B)$	$\#sol$	
2	2	∞^1	$r \subseteq \pi$
2	3	0	$r \parallel \pi$, $r \cap \pi = \emptyset$
3	3	1	$r \cap \pi = \{P\}$.

$$A = \left[\begin{array}{ccc} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{array}\right] \quad rk=2$$

$rk(A)=2 \Rightarrow$ ogni soluzione di

$$\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \end{cases}$$

vettore nel sott. di trasl di r

è anche soluzione di

$$a''x+b''y+c''z=0$$

vettore nel sott. di traslazione di π.

$\Rightarrow \quad r = [P, V_1] \quad \dim V_1 = 1$

$\pi = [Q, V_2] \quad \dim V_2 = 2$

$\Rightarrow V_1 \subseteq V_2 \Rightarrow r \parallel \pi$

Fasci di rette e di piani
Stelle di rette e di piani.

- $AG(2, \mathbb{K})$.

Sia P un punto fissato.
L'insieme di tutte le rette passanti per P è detto fascio proprio di rette di centro P.

Sia $\bar{v} \neq \underline{0}$ un vettore fissato di $\mathbb{K}^2$.
L'insieme di tutte le rette di direzione $\mathcal{L}(\bar{v})$ è detto fascio improprio di direzione $\mathcal{L}(\bar{v})$.

Le rette di un fascio sono "$\infty^1 + 1$" grossomodo.

$(a,b) \neq (0,0)$

$P = (x_0, y_0)$. $\quad r: ax+by+c=0$

Imponiamo $P \in r$, cioè $ax_0+by_0+c=0$

$\Rightarrow c = -ax_0 - by_0 \Rightarrow$

r ha equazione $\boxed{a(x-x_0)+b(y-y_0) = 0}$

con $(a,b) \neq (0,0)$. che variamo in tutti i modi possibili.

fascio proprio ↗

Sia $\bar{v} = (\ell, m) \Rightarrow a\ell + bm = 0$ perché vogliamo che la retta abbia direzione $\mathcal{L}(\bar{v}) \Rightarrow$ in particolare $(a,b) = (-m, \ell)$ genera l'insieme delle soluzioni dell'eq.

$\lambda \neq 0$

$$\boxed{r: \lambda(-m \cdot x + \ell y) + c = 0}$$

con $c \in \mathbb{K}$.

↗

fascio improprio.

N.B: equazioni proporzionali descrivono la stessa retta.

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \qquad a,b\in\mathbb{K} \quad (a,b)\neq(0,0)$$

$$\lambda(-mx+\ell y)+c=0 \qquad \lambda,c\in\mathbb{K} \quad \lambda\neq 0$$

Una retta dunque viene scritta tante volte.

in particolare, per il fascio proprio. l'insieme delle rette consta della retta

1) $y-y_0=0$ (con $a=0, b\neq 0$)

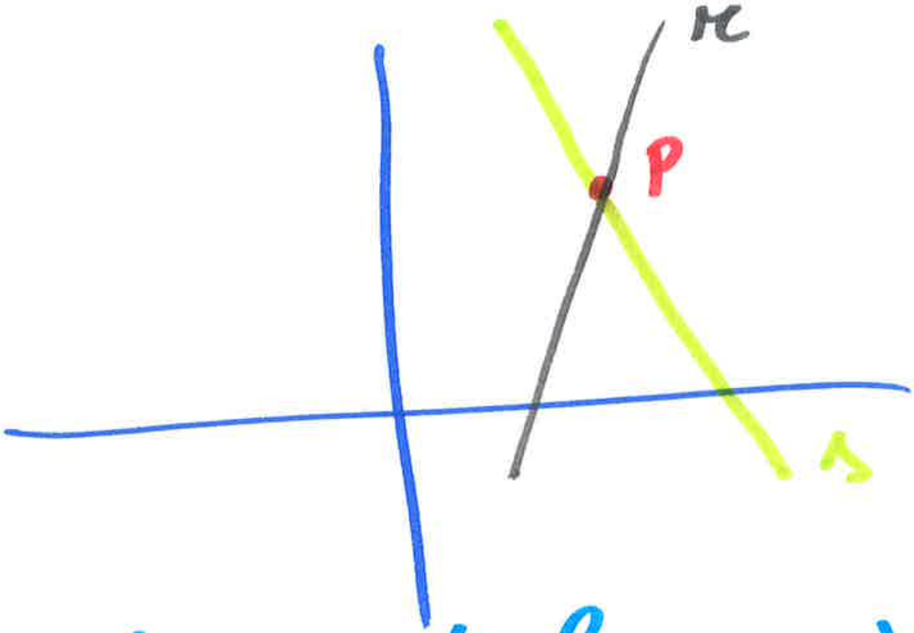
unita le rette

∞^1) $(x-x_0)+\frac{b}{a}(y-y_0)=0$ (con $a\neq 0$ al variare di $\frac{b}{a}\in\mathbb{K}$).

per il fascio improprio potete sempre dividere per $\lambda\neq 0$

$\rightarrow (-mx+\ell y)+\frac{c}{\lambda}=0 \quad \frac{c}{\lambda}\in\mathbb{K} \rightarrow \infty^1$

OSS in $AG(2, \mathbb{K})$



come costruire il fascio di centro P?

→ prendere 2 rette distinte r, s per P.

Ogni retta del fascio di centro P ha come eq. una eq. che è combinazione lineare delle equazioni di r e di s.

DIM: ovviamente se $P \in r$, $P \in s$

e $r: ax+by+c=0$ $\quad P=(x_0, y_0) \Rightarrow$

$s: a'x+b'y+c'=0$

$$\begin{aligned} &ax_0+by_0+c=0 \\ &a'x_0+b'y_0+c'=0 \end{aligned} \Rightarrow \forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}$$

$$\alpha(ax_0+by_0+c)+\beta(a'x_0+b'y_0+c')=0$$

$P \in t_{\alpha,\beta}$ retta di equazione

$$\alpha(ax+by+c)+\beta(a'x+b'y+c')=0$$

D'altro canto osserviamo che $\forall\, Q=(x_1,y_1) \in AG(2,\mathbb{K})$, $Q \neq P$ $\exists!$ retta del fascio di centro P e passante per Q.

Mostriamo che tale retta è una delle $t_{\alpha,\beta}$.

Infatti se scriviamo

$$\alpha(ax_1+by_1+c)+\beta(a'x_1+b'y_1+c)=0$$

abbiamo una eq. in α,β di rango 1 perché non può essere $ax_1+by_1+c=a'x_1+b'y_1+c'=0$ perché altrimenti sarebbe $Q=r\cap s=P$

⇒ ci sono ∞^1 soluzioni per (α, β) tali che $t_{\alpha,\beta} \ni Q$ ed in particolare $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ tale che $Q \in t_{\alpha,\beta}$.

Quindi con $t_{\alpha,\beta}$ si ottengono tutte le rette del fascio. #

Esercizio.

$$\alpha_k : \ x + (k-2)y + z + 3 = 0$$

$$r_k : \begin{cases} x - y + k = 0 \\ y + (k-1)z + 1 = 0 \end{cases}$$

→ studiare il sistema.

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & k-2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & k-1 \end{array}\right) \begin{array}{c} 3 \\ k \\ 1 \\ \uparrow \ -\beta \end{array}$$

$$\Lambda$$

$\forall k$, r_k è una retta

$rk(A) \geq 2$

$\det(A) = (1-k) + 1 + (k-2)(1-k) =$

$= (1-k)(k-1) + 1 =$

$= 1 - (k-1)^2 = k(2-k)$

$rk(A) = 3$ se $k \neq 0, 2 \Rightarrow$

$r_k \cap d_k = \{P\}$ se $k \neq 0, 2.$

$k = 0$ $\quad rk(A) = 2 \quad rk(A|B) = 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0-2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 3 + 2 = \\ = 4 \neq 0$$

$\downarrow$

$r_0 // d_0$ e $r_0 \cap d_0 = \emptyset$

$k = 2$

$rk(A) = 2$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| =$$

$-1 + 3 - 2 = 0$

$rk(A|B) = 2 \Rightarrow r_2 \equiv d_2$

$$r_k \begin{cases} x+y-kz+3=0 \\ x-ky+4z+2=0 \end{cases}$$

$\alpha_k : x+y+kz=7$

Trovare k tale che $r_k \parallel \alpha_k$.

$\Downarrow$

Trovare k tale che

$$\left\{ \begin{array}{l} rk \begin{pmatrix} 1 & 1 & -k \\ 1 & -k & 4 \end{pmatrix} = 2 \rightarrow r_k \text{ è una retta} \\ \\ rk = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -k \\ 1 & -k & 4 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} = 2 \rightarrow r_k \parallel \alpha_k \end{array} \right.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -k \\ 1 & -k & 4 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2k \\ 1 & -k & 4 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = -2k(1+k)$$

per $k \neq 0, -1$ $\quad r_k \cap \alpha_k = \{P\}$.

$k=0 \quad rk\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 2 \rightarrow r \parallel \alpha$.

$k = -1$ $\quad rk\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow r \parallel \alpha$

Risposta $k=0$ oppure $k=-1$

Es. si determini la retta del fascio per $P=(2,3)$ passante per il punto $Q=(5,6)$.

Modo più semplice in assoluto: è la retta

$$\frac{x-2}{5-2} = \frac{y-3}{6-3} \nearrow \text{retta per 2 punti}$$

fine.

Il fascio di centro P è dato da rette di equazione

$$\alpha(x-2) + \beta(y-3) = 0$$

Imponiamo il passaggio per 5, 6

$$\alpha(5-2) + \beta(6-3) = 0$$

una possibile sol. è

$$\alpha = (6-3) \quad \beta = (2-5).$$

$$(6-3)(x-2) = (5-2)(y-3)$$

DIVIDENDO $\dfrac{x-2}{5-2} = \dfrac{y-3}{6-3}$

Def: In $AG(3, \mathbb{K})$ si dicono

- **Fascio proprio** di piani l'insieme di tutti i piani passanti per una retta (detta sostegno del fascio).
- **Fascio improprio** di piani l'insieme di tutti i piani paralleli ad un piano dato.
- **Stella propria** di piani l'insieme di tutti i piani per un punto
- **Stella impropria** di piani: l'insieme di tutti i piani le cui

giacitura contiene una direzione comune.

- Stella propria di rette: tutte le rette per un punto.
- Stella impropria di rette: tutte le rette parallele ad una retta data.

Vedremo che:

I fasci hanno ∞^1 oggetti

Le stelle hanno ∞^2 oggetti.

Un "X proprio" è un oggetto i cui el. passano per un opportuno sottospazio.

Un "X improprio" è un oggetto i cui elementi hanno dei vettori assegnati ~~vettori~~ nel loro spazio di traslazione.

Sia $r: \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$ una retta di $AG(3,\mathbb{K})$.

Allora i piani del fascio per r hanno tutte e sole le equazioni della forma

$$\pi_{\alpha,\beta}: \alpha(ax+by+cz-d)+ \beta(a'x+b'y+c'z-d')=0$$

<u>DIM</u>: Innanzi tutto. ogni piano di eq. $\pi_{\alpha,\beta}$ contiene la retta r (infatti mettendo tale eq. a sistema con quelle di r si hanno ∞^1 sol.).

Sia ora σ un piano del fascio di sostegno r $\Rightarrow$ in particolare $\sigma \supseteq r$ e quindi l'equazione di σ messa a sistema con quelle di r deve dare ∞^1 soluzioni $\Rightarrow$ l'eq. di σ deve essere c. lineare delle 2 eq. che descrivono r $\square$

OSS: Sia r come prima, $P \in AG(3,\mathbb{K})$
$P=(x_P, y_P, z_P) \notin r$.
$\Rightarrow \exists!$ piano π di sostegno r passante per P.

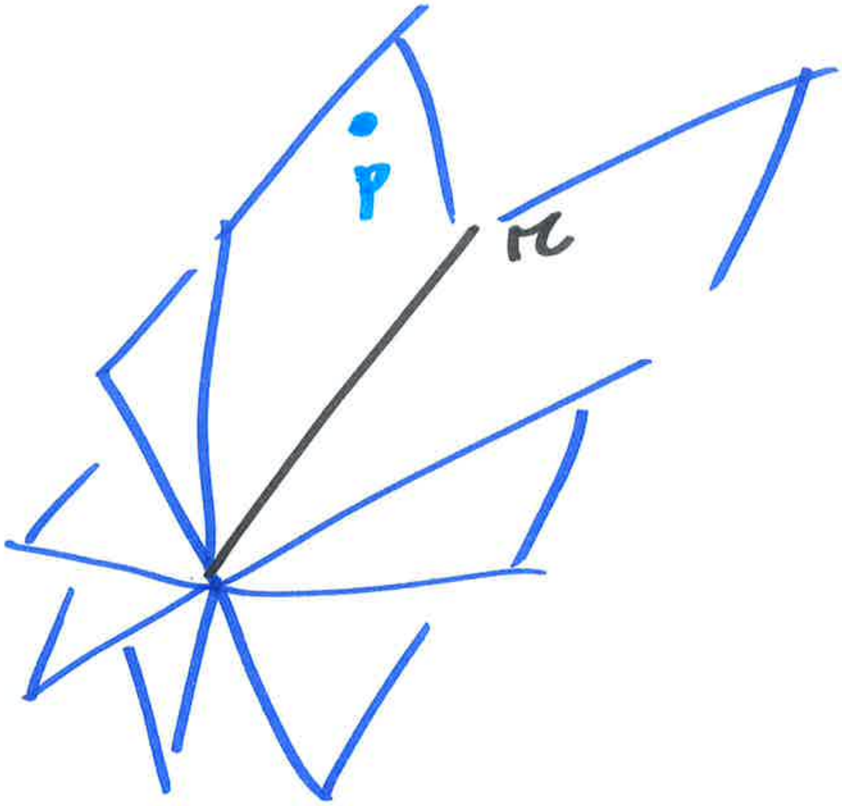
$$(*)\ 0=\alpha(ax+by+cz_p-d)+\beta(a'x+b'y+c'z-d')$$

$\downarrow$

imponiamo il passaggio per P. risolvendo il sistema in (α, β)

$$0=\alpha(ax_p+by_p+cz_p-d)+\beta(a'x_p+b'y_p+c'z_p-d')$$

poiché $P \notin r$ almeno uno dei coeff. di α o β è $\neq 0$ $\Rightarrow$ eq. in 2 incognite di $rk=1$ $\Rightarrow \infty^1$ soluzioni $\Rightarrow$ ci sono autosoluzioni ed ogni autosoluzione $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ è proporzionale alle altre (e quindi sostituito in $(*)$ dà ~~sis~~ eq. equivalenti)
$\Rightarrow \exists!$ piano come richiesto.



N.B I parametri $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ che danno le eq. dei piani del fascio sono ∞^2 ma i piani distinti sono ∞^1 perché coeff. proporzionali danno il medesimo piano.

Stelle di piani proprie.

$\pi : ax+by+cz+d=0$

consideriamo il passaggio per un punto $P=(x_0,y_0,z_0)$.

$$\boxed{ax_0+by_0+cz_0+d=0}$$

1 equazione in 4 incognite $(a\ b\ c\ d)$ con $(a\ b\ c)\neq(0\,0\,0)$

$\downarrow$

soluzioni ∞^3

ma soluzioni proporzionali danno equazioni equivalenti $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ lo stesso piano $\Rightarrow$ ∞^2 piani #

Fascio ~~proprio~~ improprio di piani.

→ Sono tutti piani paralleli ad un piano dato

$\pi : ax+by+cz+d=0$

$\alpha \neq 0$

$\pi' : \alpha(ax+by+cz)+d'=0$

perché il rango della matrice incompleta mettendoli a sistema deve essere $=1$

→ DIVIDENDO PER α e ponendo

$\xi = \frac{d'}{\alpha}$

sono proprio quelli di eq.

$ax+by+cz+\xi=0 \quad \xi \in \mathbb{K}$.

→ ∞^2 piani.

Stella impropria di piani

$\pi : ax + by + cz + d = 0$

$\bar{v} = (v_1 \; v_2 \; v_3) \neq \underline{0}$

e imponiamo che i coeff. soddisfino l'eq.

$$a v_1 + b v_2 + c v_3 = 0$$

sistema in 4 incognite (c'è anche d) di rango = 1

$\Rightarrow \infty^3$ soluzioni ma sol. prop. ci danno lo stesso piano $\Rightarrow \infty^2$ piani.

#