# Geometria Affine

Sottospazio Affine = Sottospazio lineare

$S$ tale che $\exists W \leq V_n(\mathbb{K})$ tale che $(S, f^{W}_{S\times S} : S \times S \to W)$ é spazio affine

$[P;W] = \{Q : f(P,Q) \in W\} =$

$= P + W$

tutti i possibili traslati di $P$ con vettori di $W$.

**Lemma:** Sia $Q \in [P;W] \Rightarrow$

$$[P;W] = [P;Q].$$

<u>DIM:</u> $\forall X \in [P;W]$ abbiamo $\overrightarrow{PX} \in W$ ma $Q \in [P;W]$

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} \in W \Rightarrow \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ} \in W$

$\Rightarrow \overrightarrow{QX} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PX} \in W \Rightarrow X \in [Q;W]$

$[P;W] \subseteq [Q;W]$

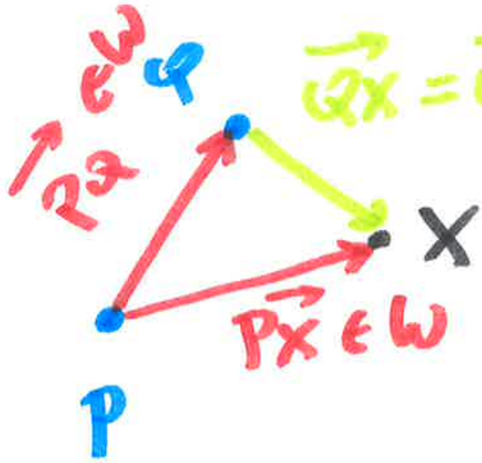
Viceversa: $\forall y \in [Q;W]$

$\overrightarrow{Qy} \in W$, $\quad P \in [Q;W]$ perché

$\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ} \in W \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \in W$

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{Qy} = \overrightarrow{Py} \in W \Rightarrow y \in [P;W]$

$\Rightarrow [Q;W] \subseteq [P;W]$ $\square$




$\overrightarrow{QX} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PX} =$
$= -\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PX}$
$\in W$

Teorema: Sia $S = [P;W]$ un sottospazio lineare $\Rightarrow S$ è un sottospazio affine.

Viceversa: Se $\mathcal{E}$ è un sottospazio affine $(\mathcal{E}; f^{W}_{|\mathcal{E}\times\mathcal{E}} : \mathcal{E}\times\mathcal{E} \to W)$ è affine $\Rightarrow \mathcal{E} = [P;W]$ ✓

DIM 1) Consideriamo la struttura $(S, f|_{S\times S} : S\times S \to V_n(\mathbb{K}))$

Per dimostrare che S è sottospazio affine basta far vedere che l'immagine di $f|_{S\times S}$ è il sottospazio vettoriale W.

Dobbiamo far vedere che

a) $\forall\, X, Y \in S,\ \overrightarrow{XY} \in W$

b) $\forall\, \bar{w} \in W;\ \forall\, X \in S,\ X + \bar{w} \in S$.

a) $X \in S \Rightarrow \overrightarrow{PX} \in W$

$Y \in S \Rightarrow \overrightarrow{PY} \in W$

$\Rightarrow \overrightarrow{XY} = -\overrightarrow{PX} + \overrightarrow{PY} \in W$ OK

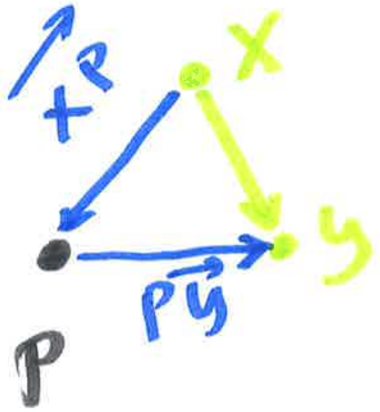
b) Sia $X \in S \Rightarrow \overrightarrow{PX} \in W$ e $\bar{w} \in W$

$\Rightarrow \overrightarrow{PX} + \bar{w} \in W \Rightarrow Y = X + \bar{w} =$

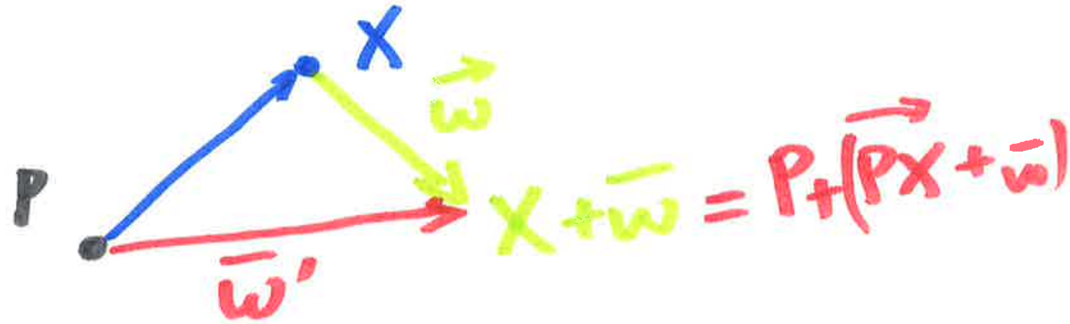
$= P + (\overrightarrow{PX} + \bar{w}) \Rightarrow$

$Y \in [P; W]$ perché $\overrightarrow{PX} + \bar{w} \in W$.

a)




b)




[[OGNI SOTTOSPAZIO LINEARE È UN SOTTOSPAZIO AFFINE]]

2) Sia $\mathcal{C}$ un sottospazio affine e $f^W_{|\mathcal{C}\times\mathcal{C}} : \mathcal{C}\times\mathcal{C} \to W$ la corrispondente funzione.

In particolare preso $P\in\mathcal{C}$ sappiamo che $\forall\, \bar{w}\in W$, $P+\bar{w}\in\mathcal{C}$

$\Rightarrow [P;W]\subseteq\mathcal{C}$

D'altro canto, $\forall X \in \mathcal{T}$, $\overrightarrow{PX} \in W$

$\Rightarrow X \in [P;W] \Rightarrow \mathcal{T} \subseteq [P;W]$.

$\Rightarrow \mathcal{T} = [P;W]$ $\square$

**Def:** Sia $\mathcal{T}$ un sottospazio affine/lineare. Allora $\exists W \in V_n(\mathbb{K})$ tale che $\mathcal{T} = [P;W]$ con $P \in \mathcal{T}$.

Si dice <u>dimensione</u> (affine) di $\mathcal{T}$ il numero

$$\dim \mathcal{T} = \dim W$$

[dimensione dello spazio di traslazione]

In generale se $AF = (A, f: A \times A \to V_n(\mathbb{K}))$ l'unico sottospazio di $AF$ di dimensione $n$ é lui stesso.

$\rightarrow$ Si parla di spazio affine di dimensione $n$.

**Def**: I sottospazi affini di AF delle seguenti dimensioni hanno questi nomi:

| $k$ | nome | # punti |
|---|---|---|
| 0 | punto | 1 |
| 1 | retta | $\infty^1$ |
| 2 | piano | $\infty^2$ |
| 3 | solido. | $\infty^3$ |
| $n-1$ | iperpiano | $\infty^{n-1}$ |
| $n$ | tutto lo spazio affine | $\infty^n$ |

$$[P; \{\underline{0}\}] = \{P\} \neq P$$

$$[P; V_1] = \{P + \bar{v} \mid \bar{v} \in \mathcal{L}(\bar{w})\} = P + \mathcal{L}(\bar{w})$$

$$AG(n, \mathbb{K}) = \left(\mathbb{K}^n, f\begin{cases}\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \\ (P, Q) \to Q - P\end{cases}\right)$$

Come sono fatti i sottospazi lineari di dim $k$?

Ricordiamo che il traslato del punto $P=(p_1 — p_n)$ col vettore $\bar{v}=(v_1 — v_n)$ è proprio dato dal punto $Q=(p_1+v_1 — p_n+v_n)$.

In particolare se

$$r_0=[P;\mathcal{L}(\bar{v})] \text{ è una}$$

retta $\Rightarrow$ gli elementi di $r$ sono proprio del tipo

$$\{Q=P+\alpha\bar{v} \mid \alpha\bar{v}\in\mathcal{L}(\bar{v})\}=$$

$$=Q+\mathcal{L}(\bar{v})$$

e si scrivono come l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare in $(n-1)$ equazioni di rango $n-1$.

$\Rightarrow$ Sono $\infty^1$ elementi.

In generale un sottospazio lineare di $AG(n,\mathbb{K})$ è un insieme del tipo

$$X_0 + W$$

con $W \leq \mathbb{K}^n$, $X_0$ "punto" fissato in $\mathbb{K}^n$

$\Rightarrow$ corrisponde ad un insieme di soluzioni di un sistema lineare.

ok per $AG(n, \mathbb{K})$ ma cosa succede nel caso di uno spazio affine arbitrario?

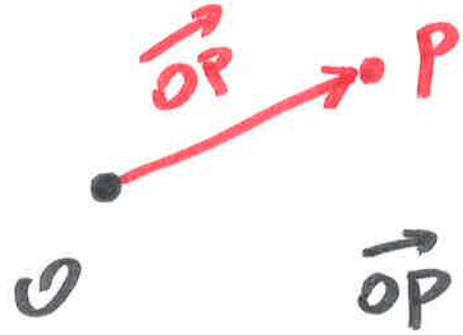
<u>Def</u>: In $AF = (A, f: A \times A \to V_n(\mathbb{K}))$ si dice <u>riferimento affine</u>.

$$\Pi := (O, \mathcal{B})$$

ove $O \in A$ é un punto fissato e $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 — \bar{e}_n)$ é una base di $V_n(\mathbb{K})$.

→ COORDINATIZZAZIONE.

Sia $P \in AF$ e $\Gamma$ un rif. affine fissato ⇒ si dicono <u>coordinate</u> di $P$ rispetto a $\Gamma$ le componenti del vettore $\vec{OP}$ rispetto a $\mathcal{B}$.




$$\vec{OP} = \sum p_i \bar{e}_i$$

coordinate di $P \to (p_1 — p_n) \in \mathbb{K}^n$

<u>OSS</u>: Il passaggio a coordinate è una biiezione da $A \to \mathbb{K}^n$

(perché siano $(p_1 — p_n) = (q_1 — q_n)$ le coordinate di 2 punti: $P, Q$ ⇒

⇒ $\vec{OP} = \vec{OQ}$ ⇒ $P = Q$

i due punti con le stesse coordinate coincidono → la funzione è iniettiva]

$\forall\ \bar{v} = (v_1 \dots v_n) \in \mathbb{K}^n$, il punto $O + (\sum v_i \bar{e}_i)$ ha proprio coordinate $\bar{v}$ ⇒ suriettiva]

OSS 2: Siano $P, Q$ due punti di $AF$, e siano $(p_1 — p_n)$, $(q_1 — q_n)$ le loro coordinate rispetto a $\Gamma$. Allora le componenti del vettore $\overrightarrow{PQ}$ rispetto a $\mathcal{B}$ sono $(q_1 - p_1 \dots q_n - p_n)$

il vettore $\overrightarrow{PQ}$ si può scrivere come $\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ e le componenti di $-\overrightarrow{OP}$ sono $(-p_1 \dots -p_n)$ e quelle di $\overrightarrow{OQ}$ sono $(q_1 — q_n)$.

In particolare la funzione

$$\varphi_\Gamma : \begin{cases} AF \longrightarrow AG(n, \mathbb{K}) \\ P \longrightarrow \text{coord. di } P \text{ rispetto a } \Gamma \end{cases}$$

é un isomorfismo nel senso che.

A) é biiettiva sui punti

B) $\psi_P(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{\psi_P(P)\,\psi_P(Q)}$

in AF

in $AG(n, \mathbb{K})$.

Geometria → punti e rette

punto in AF

retta → sottospazio lineare di dim = 1

**Teorema:** $\forall\, P, Q \in A$, $P \neq Q$, $\exists!$ retta $r_0$ con $P, Q \in r_0$. ($n \geq 1$)

DIM: Una retta é uno spazio lineare di dim = 1.

In particolare consideriamo

$r_0 = [P; \mathcal{L}(\overrightarrow{PQ})]$

chiaramente

1) $r$ è una retta $\dim \mathcal{L}(\overrightarrow{PQ}) = 1$

2) $P \in r$, $P + \overrightarrow{PQ} \in r \Rightarrow Q \in r$

sia ora $s$ un'altra retta con $P, Q \in s$.

$\Rightarrow s = [P; V_1]$, $\dim V_1 = 1$

(si può prendere $P$ come origine per il primo lemma della lezione).

ma il vettore $\overrightarrow{PQ}$ deve appartenere a $V_1$ perché $Q \in s \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \neq \underline{0}$,

$\overrightarrow{PQ} \in V_1 \Rightarrow V_1 = \mathcal{L}(\overrightarrow{PQ})$ perché $\dim V_1 = 1$ e quindi $V_1$ è generato da ogni suo vettore non nullo

$\Rightarrow s = [P; \mathcal{L}(\overrightarrow{PQ})] = r$.

$\square$

**Def**: Si dice che 3 punti $P, Q, R$ sono allineati se esiste una retta $r$ che li contiene tutti e 3.

<u>Def</u>: In AF due sottospazi:

$S = [P; \mathcal{U}]$ e $\mathcal{T} = [Q; W]$

sono detti <u>paralleli</u> $\iff \mathcal{U} \leq W$ oppure $W \leq \mathcal{U}$

e si scrive $S \parallel \mathcal{T}$

<u>OSS</u>: Siano $S \parallel \mathcal{T}$ due sottospazi.

Allora vale una delle 3 seguenti proprietà:

1) $S \leq \mathcal{T}$ oppure

2) $\mathcal{T} \leq S$ oppure

3) $S \cap \mathcal{T} = \emptyset$

<u>DIM</u> Supponiamo $\exists R \in S \cap \mathcal{T}$

e che sia $\mathcal{U} \leq W \Rightarrow$

$\forall X \in S$, $\overrightarrow{RX} \in \mathcal{U}$ in quanto

$S = [P; \mathcal{U}] = [R; \mathcal{U}]$

$\mathcal{T} = [Q; W] = [R; W]$

$\Rightarrow \overrightarrow{RX} \in W \Rightarrow R + \overrightarrow{RX} \in \mathcal{T} \Rightarrow X \in \mathcal{T}$.

ne segue $S \subseteq \mathcal{T}$.

Se $W \subseteq U$, scambiando i ruoli di $S$ e di $\mathcal{T}$ $\Rightarrow \mathcal{T} \subseteq S$. $\square$

<u>OSS</u>: Siano $S = [P, U]$ e $\mathcal{T} = [Q; W]$ due sottospazi paralleli con $\dim S = \dim \mathcal{T}$

$\Rightarrow S = \mathcal{T}$ oppure $S \cap \mathcal{T} = \phi$

<u>DIM</u>: $U \subseteq W$ e $\dim U = \dim W \Rightarrow U = W$ $\square$

Due rette / Due piani paralleli o coincidono o hanno intersezione vuota. #

$\underline{V}$ postulato: nel piano 2 rette sono parallele $\Leftrightarrow$ esse hanno intersezione vuota.

[Un sistema di 2 eq in 2 incognite con $A \neq \underline{0}$ é incompatibile $\Leftrightarrow rk(A) = 1, rk(A|B) = 2$]

# Equazioni per i sottospazi lineari $\rightarrow$ in $AG(n, \mathbb{K})$

Sia $P = (v_1 \dots v_n)$

e $W = \mathcal{L}((w_{11} \dots w_{1n}), (w_{21} \dots w_{2n}), \dots (w_{k1} \dots w_{kn})) \leq \mathbb{K}^n$

vogliamo descrivere in termini di equazioni $[P; W]$

Sia $X \in [P; W]$ $X = (x_1 \text{———} x_n)$

$$X \in [P; W] \iff \overrightarrow{PX} \in W$$

$$\begin{bmatrix} x_1 - p_1 \\ \vdots \\ x_n - p_n \end{bmatrix} \in \mathcal{L}\left( \begin{bmatrix} w_{11} \\ \vdots \\ w_{1n} \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} w_{k1} \\ \vdots \\ w_{kn} \end{bmatrix} \right)$$

$$rk \begin{pmatrix} x_1 - p_1 & w_{11} & \dots & w_{k1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - p_n & w_{1n} & \dots & w_{kn} \end{pmatrix} = rk(A)$$

con $A = \begin{bmatrix} w_{11} & \cdots & w_{k1} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{1n} & \cdots & w_{kn} \end{bmatrix}$

se $\dim W = k \Rightarrow$ le condizione sul rk diventano ~~k~~ $n-k$ equazioni di I grado

$$\left[\begin{array}{c|ccc} \boxed{\begin{matrix} x_1 - p_1 \\ \vdots \\ x_k - p_k \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} w_{11} & \cdots & w_{k1} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{1k} & \cdots & w_{kk} \end{matrix}} \\ \begin{matrix} x_{k+1} - p_{k+1} \\ \vdots \\ x_n - p_n \end{matrix} & \begin{matrix} w_{1k+1} & \cdots & w_{kk+1} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{1n} & \cdots & w_{kn} \end{matrix} \end{array}\right]$$

minore fond.

$\mathrm{rk} = k$

$\forall$ orlato del minore fond. deve avere $\det = 0$
$\downarrow$
ci sono $n-k$ orlati:
$\rightarrow \forall$ orlato $\rightarrow 1$ eq. di 1° grado in $x_i$

retta in $AG(2, \mathbb{k})$.

$$P = (x_P, y_P) \qquad V_1 = \mathcal{L}((\ell, m))$$

$$X = (x, y)$$

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} x - x_P & \ell \\ y - y_P & m \end{pmatrix} = 1$$

$$\boxed{m(x - x_P) = \ell(y - y_P)}$$

equazione della retta nel piano.

retta in $AG(3, \mathbb{k})$.

$$P = (x_P, y_P, z_P) \qquad V_1 = \mathcal{L}((\ell, m, n))$$

$$X = (x, y, z)$$

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} x - x_P & \ell \\ y - y_P & m \\ z - z_P & n \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x-x_P & l \\ y-y_P & m \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x-x_P & l \\ z-z_P & n \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} y-y_P & m \\ z-z_P & n \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-x_P)m-(y-y_P)l = 0 \\ (x-x_P)n-(z-z_P)l = 0 \\ (y-y_P)n-(z-z_P)m = 0 \end{cases}$$

N.B in $AG(3,\mathbb{K})$ una retta è descritta da un sistema di 2 equazioni indipendenti !!

dato un sistema

$$AX=B$$

compatibile $\to$ costruire

il sottospazio lineare di

$$AG(n, \mathbb{K})$$

corrispondente alle soluzioni

di detto sistema.