- Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ è detta **simmetrica** se $A = {}^tA$

- Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ è detta **ortogonale** se $A^{-1} = {}^tA$

  N.B. le righe/colonne di una matrice ortogonale sono un sistema di vettori di $\mathbb{K}^n$ ortonormali.

Teorema della base spettrale

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è **ortogonalmente diagonalizzabile** se e solamente se $A = {}^tA$

→ DIAGONALIZZABILE con matrice diagonalizzante P ortogonale.

Es. per quali valori di k la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 7 & 3 & k-1 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$ è ortog. diag.

$$\begin{cases} k=7 \\ k-1=6 \end{cases} \quad \checkmark \qquad \boxed{k=7}$$

<u>DIM</u>: Hp: $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è ortogonalmente diagonalizzabile

$\Downarrow$

Ts: $A = {}^tA$

Supponiamo $\exists\, P \in GL(n,\mathbb{R})$ e D matrice diagonale tali che

$$AP = PD \quad \& \quad {}^tP = P^{-1}$$

$$P^{-1}AP = D$$

$$\|$$

$${}^tPAP = D$$

d'altro canto ${}^tD = D$ $\Rightarrow$ trasponendo tutto

$${}^tP\,{}^tA\,P = {}^t({}^tPAP) = {}^tD$$

$$ {}^tA = P({}^tP\,{}^tA\,P)\,{}^tP = \cancel{\ldots} $$

$$ = P\,{}^tD\,{}^tP = \boxed{P D\, {}^tP} $$

e $A = \boxed{P D\, {}^tP}$

e dunque $\boxed{A = {}^tA}$

Hp: ${}^tA = A$

Ts: A ortogonalmente diag.

cioè $\exists P : {}^tP = P^{-1}$, D diagonale

$AP = PD$

[Si procede per induzione su n = ordine della matrice A

- $n = 1 \Rightarrow$ in questo caso A è una matrice simmetrica 1×1 che è anche diagonale e la matrice $I_1 = (1)$ è una matrice diagonalizzante ortogonale per A.

• $n-1 \Rightarrow n$ Supponiamo $\mathcal{T}$ valga per tutte le matrici reali e simmetriche di ordine $(n-1)\times(n-1)$

Mostriamo che deve valere per le matrici di ordine $n \times n$.

Per ipotesi $A = {}^t\!A$ ed $A \in \mathbb{R}^{n,n} \Rightarrow$ per il teorema spettrale, ogni autovalore di A è reale. In particolare, visto che $n \geq 1$, esiste almeno un $\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A)$.

• Sia λ un tale autovalore ed $X \neq \underline{0}$ un autovettore <u>reale</u> di autovalore λ.

• costruiamo una base di $\mathbb{R}^n$ completando (X) a base con il teorema di completamento della base; chiamiamola $\mathcal{B}$

- data $\mathcal{B}$ applichiamo G/S ed otteniamo una nuova base $\mathcal{B}^\circ = (X^\circ, X_2^\circ \dots X_n^\circ)$ ora ortonormale. (rispetto prod. scalare std.)

OSSERVIAMO CHE $X^\circ = \alpha X$ e quindi anche X° è un autovettore reale di autovalore λ. ($\alpha \neq 0$)

- Sia P_0 la matrice che ha come colonne proprio i vettori $X^\circ X_2^\circ \dots X_n^\circ$

<u>OSS</u>: ${}^tP_0 = P_0^{-1}$ perché le colonne di P_0 sono un sistema ortonormale.

- CALCOLIAMO

$$
{}^tP_0 A P_0 = \begin{bmatrix} {}^tX^\circ A X^\circ & {}^tX^\circ A X_2^\circ & \dots & {}^tX^\circ A X_n^\circ \\ {}^tX_2^\circ A X^\circ & {}^tX_2^\circ A X_2^\circ & \dots & {}^tX_2^\circ A X_n^\circ \\ \vdots & & & \\ {}^tX_n^\circ A X^\circ & \dots & & {}^tX_n^\circ A X_n^\circ \end{bmatrix}
$$

$${}^tX^\circ A X_i^\circ = {}^t({}^tX^\circ A X_i^\circ)$$
$$= {}^tX_i^\circ A X^\circ \text{ perché } A = {}^tA$$

$$
= \left[\begin{array}{c|ccc}
{}^tX_1^0 \lambda X_1^0 & {}^tX_2^0 \lambda X_1^0 & \dots & {}^tX_n^0 \lambda X_1^0 \\
\hline
{}^tX_2^0 \lambda X_1^0 & & & \\
\vdots & & C \in \mathbb{R}^{n-1,n-1} & \\
{}^tX_n^0 \lambda X_1^0 & & &
\end{array}\right] =
$$

$$
= \left[\begin{array}{c|ccc}
\lambda \overbrace{X_1^0 \cdot X_1^0}^{=1} & \lambda \overbrace{X_2^0 \cdot X_1^0}^{=0} & \dots & \lambda \overbrace{X_n^0 \cdot X_1^0}^{=0} \\
\hline
\lambda \underbrace{X_2^0 \cdot X_1^0}_{=0} & & & \\
\vdots & & C & \\
\underbrace{\lambda X_n^0 \cdot X_1^0}_{=0} & & &
\end{array}\right]
$$

$$
= \left[\begin{array}{c|ccc}
\lambda & 0 & \dots & 0 \\
\hline
0 & & & \\
\vdots & & C & \\
0 & & &
\end{array}\right]
$$

oss. $C = {}^tC$

infatti

$$
{}^t({}^tP_0 A P_0) = {}^tP_0 \, {}^tA P_0 =
$$

$$
= {}^tP_0 A P_0 = \left[\begin{array}{c|c}
\lambda & \\
\hline
 & {}^tC
\end{array}\right]
$$

possiamo provare ad applicare l'ipotesi induttiva su C.

esiste una matrice $Q \in GL(n-1, \mathbb{R})$ con ${}^tQ = Q^{-1}$ e

${}^tQ\,C\,Q = D_0$ con D_0 matrice diagonale.

poniamo $P_1 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0\,0 \dots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & Q \\ 0 & \end{array}\right]$

e consideriamo ${}^tP_1({}^tP_0 A P_0)P_1$

P_1 è una matrice che non cambia la prima riga o la prima colonna ma solo il blocco C.

$${}^tP_1({}^tP_0 A P_0)P_1 = {}^tP_1 \left(\begin{array}{c|c} \delta & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right) P_1 =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & {}^tQ \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \delta & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \delta & 0 \\ \hline 0 & {}^tQCQ \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \delta & 0 \\ \hline 0 & D_0 \end{array}\right] = D$$

pongo ord $P = P_0 P_1 \Rightarrow$

1) $\boxed{D = {}^tPAP}$ da solo non dice A simile a D

2) $${}^tPP = {}^tP_1 \underbrace{{}^tP_0 P_0}_{= I \text{ perché } P_0 \text{ ortogonale}} P_1 = {}^tP_1 P_1 =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & {}^tQ \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & {}^tQQ \end{array}\right] =$$

$= I$ perché ${}^tQQ = I$

$\Rightarrow$ P ortogonale $\Rightarrow D = P^{-1}AP$

e dunque P matrice diagon. ortogonale per A. $\square$

OSS: Il teorema appena dimostrato dice che una matrice reale e simmetrica A ammette matrice diagonalizzante ortogonale.

NON DICE che ogni matrice diag. per A sia ortogonale !!!

Es. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

autovalori sono $\lambda^2 - 1 = 0$

$\lambda = +1$

$\lambda = -1$

autospazi

$V_1 = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$V_{-1} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ è diag. per A ma P non é ortogonale

anche se $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

cioé le sue colonne / righe

sono ortogonali fra loro.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq I$$

una matrice diag. ortogonale

per A si ottiene ortonormalizzando

le colonne di P.

$$P' = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$\square$

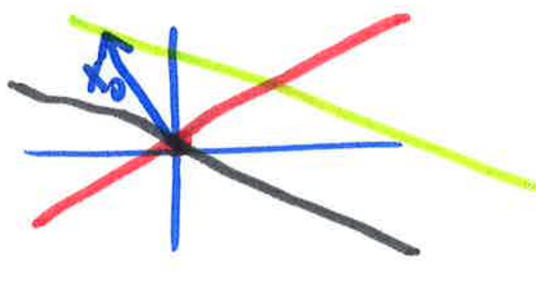
Geometria (analitica).

→ modo per capire/visualizzare il comportamento dei sistemi lineari (e non)

<u>OSS</u>: l'insieme delle soluzioni di un sistema $AX=\underline{0}$ è un sottospazio vettoriale.

che genere di struttura è in generale l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare (compatibile) non omogeneo $AX=B$.

$$S = X_0 + \ker(A)$$



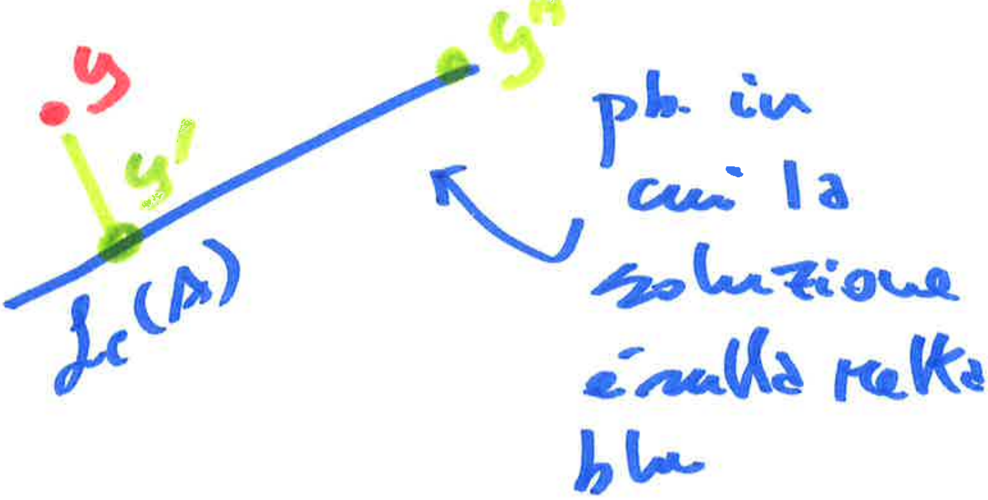
$\alpha x+\beta y=0$

$\alpha' x+\beta' y+\gamma=0$

$\alpha' x+\beta' y=0$

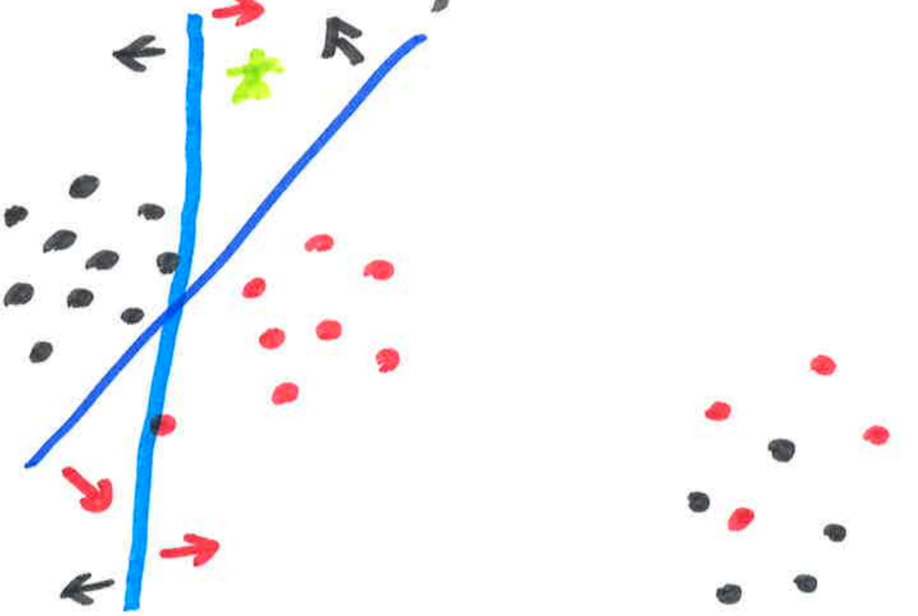
possiamo pensare anche alla nozione di

distanza fra soluzioni / insiemi / sistemi lineari e cercare di approssimare cosa accade.



es. un sistema lineare $AX = y$ è compatibile $\Longleftrightarrow y \in \mathcal{L}_c(A)$ e quindi deve appartenere ad un certo sottospazio.

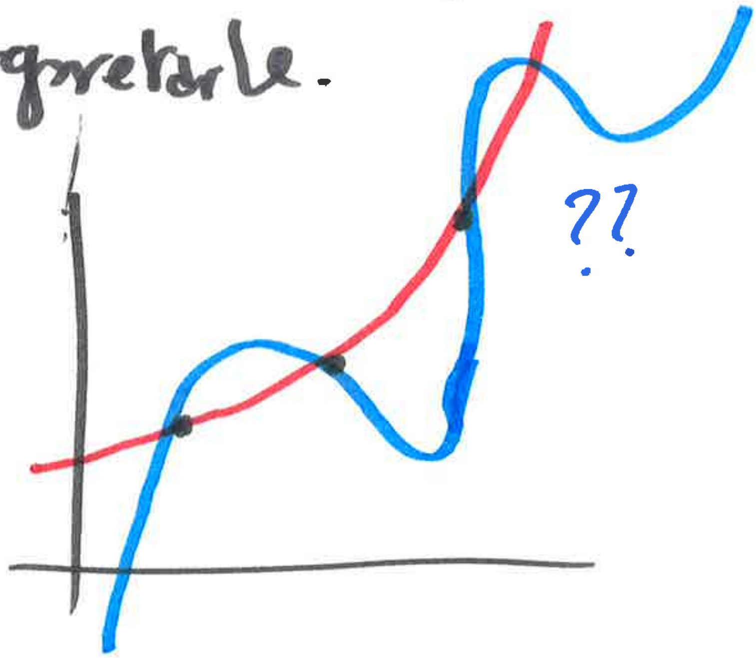
SVM



→ Dare una fondazione rigorosa alla geometria Euclidea classica.

→ Sistematizzare ed organizzare le proprietà geometriche.

→ Geometria come metodo per rappresentare informazioni e/o interpretarle.



—

Geometria affine su di un campo $\mathbb{K}$.

Si dice spazio affine associato ad uno spazio vettoriale $V_n(\mathbb{K})$

Una coppia $AF \equiv (A, f)$

ove A è un insieme $A \neq \emptyset$

e $f: A \times A \to V_n(\mathbb{K})$

tale che valgano le

seguenti 2 proprietà:

1) $\forall\, P \in A, \forall\, \bar{v} \in V_n(\mathbb{K})$

$\exists!\, Q \in A$ tale che

$$f(P, Q) = \bar{v}$$

2) $\forall\, P, Q, R \in A$

$$f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

A è detto insieme dei punti di AF

Il punto Q che compare in (1) è

detto traslato di P mediante $\bar{v}$ e

scriverò $\quad Q = P + \bar{v} \quad$ e anche $\quad \overrightarrow{PQ} = f(P, Q)$

2) diventa $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

OSS: Non ho detto come sono fatti gli elementi di A.

→ sono "qualsiasi cosa soddisfi le 2 proprietà". In particolare la 1 implica che $|A| = |V_n(\mathbb{K})|$ ma nulla di più.

↓

Un punto è qualche cosa che può essere traslato con un vettore.

perché $|A| = |V_n(\mathbb{K})|$?

OSSERVIAMO CHE $\forall P$ fissato la funzione

$$\tau_P \begin{cases} \cancel{V_n} \to A \\ \bar{v} \to P + \bar{v} \end{cases}$$

è una biiezione. Infatti è iniettiva per ipotesi. (1)

ed é suriettiva perché preso

~~tale~~ $\forall Q \in A$ $\quad \bar{v} = \overrightarrow{PQ}$

si ha $\tau_P(\bar{v}) = Q$

perché ~~$f(P,X)$~~ $\tau_P(\bar{v})$ é

il punto X tale che

$$f(P,X) = \bar{v} = f(P,Q)$$

ma per (1) ne segue $X = Q$.

proprietà: 1) $f(P,P) = \underline{0}$ perché

$$\overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP} \text{ per la (2)}$$

$\Rightarrow$ sottraendo si ha $\overrightarrow{PP} = \underline{0}$ $\forall P$

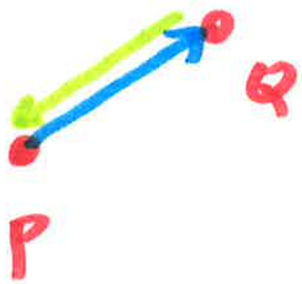
~~2) $\overrightarrow{PQ} = \underline{0} \Leftrightarrow Q = P$~~

~~P~~

2) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \underline{0}$ perché

$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = \underline{0}$

ma allora $\boxed{\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}}$



$\rightarrow = \overrightarrow{PQ}$

$\rightarrow = \overrightarrow{QP}$

$\rightarrow$ ... $\Rightarrow P = Q$. Se P=Q allora $\overrightarrow{PQ} = 0$ vett.

3) $\vec{PQ} = \underline{0} \iff Q = P.$

se $Q = P \Rightarrow \vec{PP} = \underline{0}$ per 1.

altrimenti: $P + \vec{PQ} = P$ e dunque

$$\vec{PP} + \vec{PQ} = \vec{PQ} = \vec{PP}$$

ne segue che deve essere $Q = P$ per l'unicità del traslato

$$P + \vec{PQ} = P + \vec{PP}.$$

$\square$

In realtà di uno spazio affine con i soli punti possiamo far poco $\Rightarrow$ l'unica cosa che possiamo fare è traslare i punti.

$\rightarrow$ Vogliamo considerare ora uno spazio affine + i suoi sottospazi.

Diciamo <u>sottospazio affine</u> S di $AF(A, f: A \times A \to V_n(\mathbb{K}))$ un sottoinsieme

$S \subseteq A$ tale che ~~A~~ S rispetto f opportunamente ~~a~~ ristretta ~~e~~ troncata ad un $W \leq V_n(\mathbb{K})$ sia ancora uno spazio affine.

$$(A, f : A \times A \to V_n(\mathbb{K}).)$$

$$S \subseteq A \qquad f_{|S \times S} : S \times S \to V_n(\mathbb{K})$$

S sottospazio ~~se~~ $\exists W \leq V_n(\mathbb{K})$ tale che $\mathrm{Im}(f_{|S \times S}) = W$

e quindi

$$(S, f^{W}_{|S \times S} : S \times S \to W)$$

è ~~[illegible]~~ spazio affine.

Esempio.

$$A = \mathbb{R}^3 \qquad V_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3$$

$$AG(3,\mathbb{R}) = \left(\mathbb{R}^3,\ f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (\bar{x}, \bar{y}) \to \bar{y} - \bar{x} \end{cases} \right)$$

esercizio: verificare che $AG(3,\mathbb{R})$ è uno spazio affine.

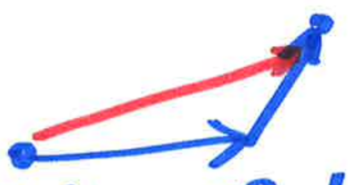
$$\forall\ \overset{P=}{(x_1, x_2, x_3)} \in A,\ \bar{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$$

$$\exists!\ \overset{Q=}{(y_1, y_2, y_3)} \in A \text{ tale che}$$

$$(y_1\ y_2\ y_3) - (x_1\ x_2\ x_3) = (v_1\ v_2\ v_3)$$

$$(y_1\ y_2\ y_3) = (x_1, x_2, x_3) + (v_1\ v_2\ v_3)$$

$$Q = P + \bar{v}$$



$P = (x_1\ x_2\ x_3)$ $\quad Q = (y_1\ y_2\ y_3)$ $\quad R = (z_1\ z_2\ z_3)$

$$\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$$

$$\underbrace{(y_1\, y_2\, y_3) - (x_1\, x_2\, x_3)}_{= \vec{PQ}} +$$

$$\underbrace{(z_1\, z_2\, z_3) - (y_1\, y_2\, y_3)}_{= \vec{QR}} =$$

$$= (z_1\, z_2\, z_3) - (x_1\, x_2\, x_3) = \vec{PR} \quad \square$$

Sia $S = (1\ 2\ 3) + \mathcal{L}((7,5,6))$

ASSERISCO CHE S é un sottospazio.

$\downarrow$

mi basta e ancora far vedere che l'immagine di $f|_{S\times S}$ é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

$P = ((1,2,3) + \alpha(7\,5\,6))$ $\quad Q = ((1\,2\,3) + \beta(7\,5\,6))$

$f(P,Q) = (1\,2\,3) + \alpha(7\,5\,6) + (1\,2\,3) + \beta(7\,5\,6)$

$= (\beta - \alpha)(756) \in \mathcal{L}((756))$

e vedere che al variare di α, β in tutti i modi possibili si ottiene proprio che $Im(f_{1_{5\times5}}) = \mathcal{L}((756))$

S é sottospazio affine di $AF(3, \mathbb{R})$

Sia AF uno spazio affine.

$$(A, \delta : A \times A \to V_n(\mathbb{K}))$$

Si dice che $T = [P; W]$ é un <u>sottospazio lineare</u> di AF se $P \in A$, $W \leq V_n(\mathbb{K})$ e

$$T = \{ Q \mid \overrightarrow{PQ} \in W \}.$$

Teorema

I sottospazi affini di AF sono tutti e soli i suoi sottospazi lineari

Def Se T sottospazio lineare di AF

e $T = [P; W] \Rightarrow$ si dice che

P è l'origine di T e W è il

sottospazio di traslazione di T

Si dice dimensione di T il

numero $\boxed{\dim(T) := \dim(W)}$

Un sottospazio lineare T di

$AF_n := (A, f: A \times A \to V_n(\mathbb{K}))$

è detto

$\dim T$	nome	# punti
0	punto	1
1	retta	∞^1
2	piano	∞^2
3	solido	∞^3
$n-1$	iperpiano	∞^{n-1}

se $\dim(T) = n \Rightarrow T = A$

DIMOSTREREMO

A) che se $Q \in [P;W] \Rightarrow [P;W] = [Q;W]$

(si può scegliere il punto che si vuole all'interno di $[P;W]$ come origine).

B) ogni sottospazio lineare è un sottospazio affine.

(facile → verificare la chiusura).

C) ogni sottospazio affine^{X} è un sottospazio lineare.

(si fissa un punto in X e si considerano i suoi traslati).

↓

introdurremo poi delle coordinate per poter lavorare direttamente su elementi di $\mathbb{K}^n$.