prodotti scalari:

$V(\mathbb{K})$

$$\beta : V(\mathbb{K}) \times V(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

BILINEARE

$$\beta(a\bar{v}+b\bar{w},\bar{u}) = a\beta(\bar{v},\bar{u}) + b\beta(\bar{w},\bar{u})$$

$$\beta(\bar{v},a\bar{w}+b\bar{u}) = a\beta(\bar{v},\bar{w}) + b\beta(\bar{v},\bar{u})$$

SIMMETRICA

$$\beta(\bar{v},\bar{w}) = \beta(\bar{w},\bar{v}).$$

$$\forall \bar{u},\bar{v} \in V(\mathbb{K}) \quad \bar{u} \perp \bar{v} \iff \beta(\bar{u},\bar{v}) = 0$$

Inoltre denoteremo per semplicità

$\beta = *$ $\qquad \beta(\bar{u},\bar{v}) = \bar{u} * \bar{v}.$

1) β è rappresentata da una matrice simmetrica A rispetto a base.

e $\bar{x} = {}^tEX \quad \bar{y} = {}^tEY$

$$\beta(x,y) = {}^tXAY$$

2) valgono alcune proprietà su $\perp$

- $A \subseteq B \Rightarrow B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$
- $\mathcal{L}(A)^{\perp} = A^{\perp}$ ed è sempre un sottospazio.
- $A \subseteq A^{\perp\perp}$ (in realtà $\mathcal{L}(A) \subseteq A^{\perp\perp}$)

OSS: In generale abbiamo che

$\forall A \subseteq V(\mathbb{K}) \quad A^{\perp\perp} = \mathcal{L}(A)$

se e solamente se $\det(B) \neq 0$

ove B è una qualsiasi matrice che rappresenta il prodotto scalare.

Fra prodotti scalari e sistemi lineari c'è un legame stretto.

In particolare se

$A = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2 \dots \bar{a}_k\}$ $\mathcal{B}$ base di $V_n(\mathbb{K})$

B = matrice che rappresenta β rispetto a $\mathcal{B}$

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix}$$ ← componenti dei vettori di A rispetto a $\mathcal{B}$.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Le componenti dei vettori di $A^{\perp}$ sono esattamente gli elementi dello spazio vettoriale soluzione di:

$$\underbrace{(C\mathcal{B})X = 0}_{\text{k equazioni ognuna delle quali impone l'ortogonalità con 1 dei vettori di } A}$$

<u>oss</u> Se $\det(B) \neq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow rk(CB) = rk({}^tB\,{}^tC) =$$

$$= rk(C)$$

perché B rappresenta anche una tras. lineare con $\ker(B) = \{\underline{0}\}$ e dunque che manda vettori liberi in vettori liberi.

$$\Rightarrow rk(C) = \dim \mathcal{L}(A)$$

$$rk(CB) = \dim \mathcal{L}(A)$$

$$\dim \ker(CB) = n - \dim \mathcal{L}(A).$$

$$\dim A^{\perp} = n - \dim \mathcal{L}(A)$$

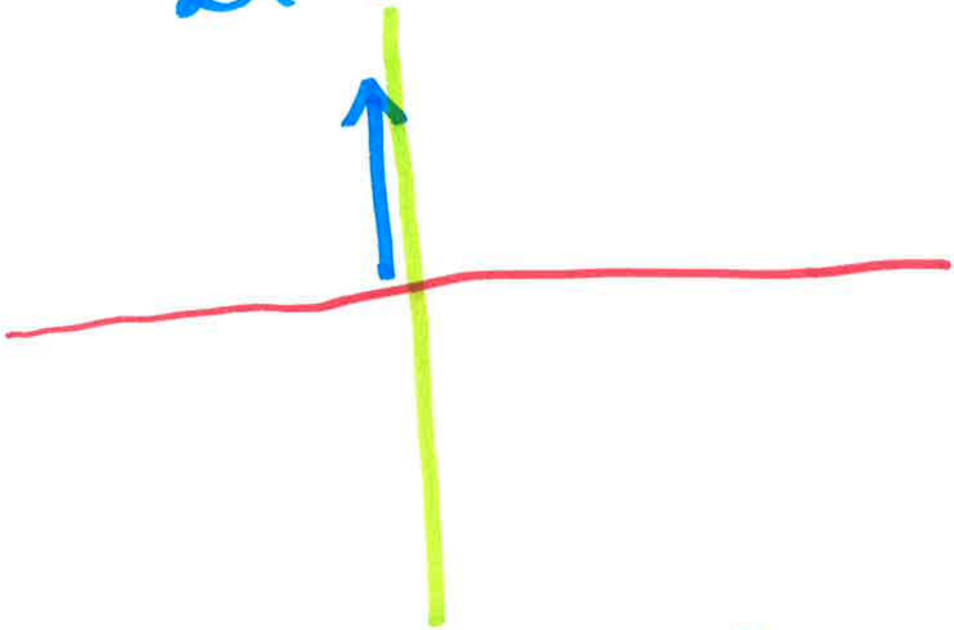
$$\dim A^{\perp\perp} = n - \dim A^{\perp} =$$

$$= n - (n - \dim \mathcal{L}(A)) =$$

$$= \dim \mathcal{L}(A)$$

ne segue poiché $\mathcal{L}(A) \subseteq A^{\perp\perp}$

$$\mathcal{L}(A) = A^{\perp\perp}$$



Se $\det(B) \neq 0$ si dice che il prodotto scalare è non degenere.

Esempio di prod. scalare su $\mathbb{K}^n$

→ prodotto scalare standard.

↓ quello rappresentato dalla matrice identica rispetto la base canonica.

$$(x_1 \text{ --- } x_n)\cdot(y_1 \text{ --- } y_n) = x_1y_1 + x_2y_2 + \text{ --- } + x_ny_n$$

Supponiamo di avere

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

$\downarrow$

possiamo rileggerlo come

$A I_n X = \underline{0}$ con A matrice incompleta

$$\begin{cases} (a_{11} \ldots a_{1n}) \cdot (x_1 \ldots x_n) = 0 \\ (a_{21} \ldots a_{2n}) \cdot (x_1 \ldots x_n) = 0 \\ \vdots \\ (a_{k1} \ldots a_{kn}) \cdot (x_1 \ldots x_n) = 0 \end{cases}$$

cioé $\mathrm{Ker}(A) = A^{\perp}$

$\perp$ rispetto il prd. scalare standard.

NOI SAPPIAMO CHE LE COLONNE DI A SONO LEGATE AL VETTORE DEI TERMINI NOTI (R/c)

RIGHE

↓

In particolare vediamo che

Ker(A) dipende solamente da $\mathcal{L}(A)$

perché $\boxed{Ker(A) = A^{\perp} = \mathcal{L}(A)^{\perp}}$

Tutte le operazioni che costruiscono un sistema lineare (omogeneo) in cui lo spazio generato dalle righe non cambia ci danno sistemi lineari equivalenti.

... VEDIAMO IL RUOLO SVOLTO DALLE

prodotti scalari reali.

$$\mathbb{K}=\mathbb{R}$$

- Si dice che un prodotto scalare

$$*: V(\mathbb{R})\times V(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

é <u>definito positivo</u> se

$$\boxed{\forall \bar{v}\in V(\mathbb{R}) \quad \bar{v}*\bar{v}\geq 0 \ \& \ \bar{v}\cdot\bar{v}=0 \Rightarrow \bar{v}=\underline{0}}$$

<u>Esempio</u>: In $\mathbb{R}^n$ il prodotto scalare standard.

$$\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y,z)*(x',y',z') \longrightarrow (xx'+yy'+zz').$$

$$(x\ y\ z)*(x\ y\ z) = x^2+y^2+z^2 \geq 0$$

Un prodotto scalare definito positivo é detto anche prodotto (scalare) euclideo.

Sia $* : V_n(\mathbb{R}) \times V_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

un prodotto euclideo.

Diciamo <u>norma</u> di $\bar{v} \in V_n(\mathbb{R})$

il numero $\boxed{\|\bar{v}\| := \sqrt{\bar{v} * \bar{v}}}$

La norma rappresenta la "lunghezza" di $\bar{v}$

1) $\|\bar{v}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{v} * \bar{v} = 0 \Leftrightarrow \bar{v} = \underline{0}$

2) $\|\alpha \bar{v}\| = \sqrt{(\alpha\bar{v}) * (\alpha\bar{v})} = \sqrt{\alpha^2 (\bar{v} * \bar{v})} =$

$= |\alpha| \sqrt{\bar{v} * \bar{v}} = |\alpha| \, \|\bar{v}\|$.

<u>Def</u>: Un vettore $\bar{v} \in \underbrace{V_n^*(\mathbb{R})}$

spazio vettoriale euclideo su $\mathbb{R}$ dotato del prod. scalare $*$

è detto <u>versore</u> se $\|\bar{v}\| = 1$

OSS: Un prodotto scalare definito positivo è sempre rappresentato rispetto qualsivoglia base $\mathcal{B}$ da una matrice B con $\det(B) \neq 0 \Rightarrow$ è non degenere

DIM: Se $\det(B) = 0 \Rightarrow \exists\, X \in \ker(B)$ con $X \neq \underline{0} \Rightarrow {}^t X B X = {}^t X \underline{0} = 0$ e dunque il prod. scalare non sarebbe definito positivo. $\square$

CONSEGUENZA:

Teorema: Sia $A \leq V_n^0(\mathbb{R}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow A \oplus A^{\perp} = V_n^0(\mathbb{R})$$

In particolare $A^{\perp}$ è un complemento diretto di A, detto *complemento ortogonale* di A.

DIM: $\dim A^{\perp} = n - \dim(A)$

mostriamo che $A^\perp \oplus A$ perché se così è abbiamo $\dim(A^\perp + A) = n - \dim(A) + \dim(A) = n \Rightarrow A^\perp \oplus A = V_n^\circ(\mathbb{R})$.

prendiamo $\bar{x} \in A^\perp \cap A \Rightarrow \underset{\in A^\perp}{\bar{x}} \circ \underset{\in A}{\bar{x}} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar{x} = \underline{0} \Rightarrow A^\perp \cap A = \{\underline{0}\}.$$

□

Def Sia $\circ : V_n^\circ(\mathbb{R}) \times V_n^\circ(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ un prodotto scalare euclideo.

Diciamo che una sequenza $(\bar{a}_1 \text{ —— } \bar{a}_k)$ di vettori di $V_n^\circ(\mathbb{R})$ é <u>ortonormale</u> se

$$\bar{a}_i \circ \bar{a}_j = \begin{cases} 1 & \text{quando } i = j \\ 0 & \text{quando } i \neq j \end{cases}$$

Lemma: Una sequenza ortonormale é sempre libera.

DIM considerciamo una c. lineare dei vettori che dà $\underline{0}$

$$\alpha_1\bar{a}_1 + \dots + \alpha_k\bar{a}_k = \underline{0}$$

facciamo a dx e sx il prodotto scalare per $\bar{a}_i$

$$\underbrace{\bar{a}_i \cdot (\alpha_1\bar{a}_1 + \_\_\_ + \alpha_k\bar{a}_k)}_{\downarrow} = \bar{a}_i \cdot \underline{0} = 0$$

$$\alpha_1(\underbrace{\bar{a}_i \cdot \bar{a}_1}_{0}) + \dots + \alpha_i(\underbrace{\bar{a}_i \cdot \bar{a}_i}_{1}) + \dots + \alpha_k(\underbrace{\bar{a}_i \cdot \bar{a}_k}_{1}) =$$

$$= \alpha_i \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = 0 \quad \forall i$$

Ne segue che la sequenza è libera $\square$

Supponiamo $\mathcal{B}^o = (\bar{e}_1 — \bar{e}_n)$ sia una base ortonormale di $V_n^o(\mathbb{R})$

Accadono 2 fatti

I) la matrice che rappresenta o rispetto $\mathcal{B}^\circ$ è la matrice identica.

$$B = ((\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j))_{i,j=1}^{n}$$

II) Sia $\bar{v} = v_1\bar{e}_1 + v_2\bar{e}_2 + \_\_ + v_n\bar{e}_n$ un vettore di $V_n^\circ(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{e}_i \cdot \bar{v} = v_i}$$

La componente i-esima del vettore $\bar{v}$ rispetto la base $\mathcal{B}^\circ$ si calcola facendo il prodotto scalare di $\bar{v}$ per $\bar{e}_i$

↳ molto più semplice che non risolvere il sistema lineare procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt.

→ ALGORITMO CHE DATA

→ INPUT: Base $\mathcal{B}$ di $V_n^o(\mathbb{R})$

→ OUTPUT: Base $\mathcal{B}^o$ ortonormale di $V_n^o(\mathbb{R})$

con in più la proprietà che se

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \text{——} \bar{e}_n)$

$\mathcal{B}^o = (\bar{e}_1^o \text{——} \bar{e}_n^o)$

$\forall\, 1 \le i \le n \quad \mathcal{L}(\bar{e}_1 \text{—} \bar{e}_i) = \mathcal{L}(\bar{e}_1^o \text{—} \bar{e}_i^o)$

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \text{——} \bar{e}_n)$

~~poniamo~~

poniamo $\quad \bar{e}_1' = \dfrac{1}{\|\bar{e}_1\|}\bar{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\bar{e}_1\cdot\bar{e}_1}}\bar{e}_1$

$$\bar{e}_1^\circ = \bar{e}_1'$$

$$e_1^\circ \cdot e_1^\circ = \frac{\bar{e}_1\cdot\bar{e}_1}{\bar{e}_1\cdot\bar{e}_1} = 1$$

$$\bar{e}_2' = \bar{e}_2 - \frac{(\bar{e}_2\cdot\bar{e}_1^\circ)}{\bar{e}_1^\circ\cdot\bar{e}_1^\circ}\bar{e}_1^\circ$$

$$\bar{e}_2^\circ = \frac{1}{\|\bar{e}_2'\|}\bar{e}_2'$$

che $\|\bar{e}_2^\circ\| = 1$
è immediato.

$$\bar{e}_2^\circ \cdot \bar{e}_1^\circ = \frac{1}{\|\bar{e}_2'\|}\left(\bar{e}_2\cdot\bar{e}_1^\circ - \frac{\bar{e}_2\cdot\bar{e}_1^\circ}{\bar{e}_1^\circ\cdot\bar{e}_1^\circ}(\bar{e}_1^\circ\cdot\bar{e}_1^\circ)\right)$$

$$\bar{e}_3' = \bar{e}_3 - \frac{\overbrace{(\bar{e}_3\cdot\bar{e}_2^\circ)}^{=0}}{\bar{e}_2^\circ\cdot\bar{e}_2^\circ}\bar{e}_2^\circ - \frac{(\bar{e}_3\cdot\bar{e}_1^\circ)}{\bar{e}_1^\circ\cdot\bar{e}_1^\circ}\bar{e}_1^\circ$$

$$\bar{e}_3^\circ = \frac{1}{\|\bar{e}_3'\|}\bar{e}_3'$$

$$\bar{e}_K' = \bar{e}_K - \sum_{j<K} \frac{(\bar{e}_K \cdot \bar{e}_j^\circ)}{\bar{e}_j^\circ \cdot \bar{e}_j^\circ} \bar{e}_j^\circ$$

K esimo vettore di $\mathcal{B}$

cui sottraiamo

le componenti nelle direzioni dei precedenti vettori calcolati di $\mathcal{B}^\circ$

$$\bar{e}_K^\circ = \frac{1}{\|\bar{e}_K'\|} \bar{e}_K'$$

si divide il vettore per la sua norma

$\mathcal{B}^\circ = (\bar{e}_1^\circ \ldots \bar{e}_n^\circ)$.

per come sono costruite le c. lineari: $\mathcal{L}(\bar{e}_1 \ldots \bar{e}_i) = \mathcal{L}(\bar{e}_1^\circ \ldots \bar{e}_i^\circ)$ $\forall i$ ed in particolare $\mathcal{B}^\circ$ é una base di $V_n^\circ(\mathbb{R})$.

Esempio.

In $\mathbb{R}^3$, prod. scalare std.

$$\mathcal{B} = ((1\,0\,0), (0\,1\,0), (0\,0\,1)).$$

$$e_1' = \frac{1}{1}(1\,0\,0).$$

$$\bar{e}_1^{\circ} = e_1'$$

$$\bar{e}_2' = (0\,1\,0) - [(0\,1\,0)\cdot(1\,0\,0)](1\,0\,0) =$$

$$= (0\,1\,0)$$

$$\bar{e}_2^{\circ} = (0\,1\,0).$$

$$\bar{e}_3' = (0\,0\,1) - (0\,0\,1)\cdot(1\,0\,0)(1\,0\,0)$$

$$- (0\,0\,1)\cdot(0\,1\,0)(0\,1\,0) =$$

$$= (0\,0\,1)$$

$$\bar{e}_3^{\circ} = (0\,0\,1).$$

$$\mathcal{B}^{\circ} = ((1\,0\,0), (0\,1\,0), (0\,0\,1))$$

Sono partito da una base ortonormale $\rightarrow$ ho ottenuto la medesima base.

Εξ 2:

$\mathcal{B} = ((100), (010), (123))$

G/S. $\bar{e}_1^{\circ} = (100)$

$\bar{e}_2^{\circ} = (010)$

$\bar{e}_3' = (123) - (123)\cdot(100)(100)$
$\qquad - (123)\cdot(010)\cdot(010)$

$= (003)$

$\bar{e}_3^{\circ} = \dfrac{1}{\|(003)\|}(003) = (001)$

$\mathcal{B}^{\circ} = ((100), (010), (001))$

Εξ. 3 $\mathcal{B} = ((123), (100), (010))$.

$\bar{e}_1' = (123)$

$\bar{e}_1^{\circ} = \dfrac{1}{\|(123)\|}(123) = \dfrac{1}{\sqrt{14}}(123)$

$\bar{e}_2' = (010) - (010)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{14}}(123) = (123) =$

$= (010) - \dfrac{2}{\sqrt{14}}(123) =$

$$= \left(-\frac{2}{\sqrt{14}}, 1-\frac{4}{\sqrt{14}}, -\frac{6}{\sqrt{14}}\right).$$

$$\bar{e}_2^{\circ} = \bar{e}_2' \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{4+\cdots}{14}}}$$

$$\bar{e}_3' = - \quad -$$

$$a^2+b^2=c^2$$

$$4^2+3^2=5^2$$

<u>OSS</u> Come sono fatte le matrici di cambiamento di base fra basi ortonormali?

$\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ basi ortonormali

E $\quad E'$ e supponiamo di avere $\bar{E}'=T\bar{E}$ con T matrice di cambiamento di base.

Siano A ed A' le matrici che rappresentano il prod. scalare rispetto $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$

ABBIAMO VISTO CHE

$$A' = T A {}^tT$$

$${}^ty' A' x' = {}^ty' T A {}^tT x'$$

ma se $\mathcal{B}$ ortonormale $\Rightarrow A = I$
$\mathcal{B}'$ ortonormale $\Rightarrow A' = I$

$$\Rightarrow I = T I {}^tT = T {}^tT$$

[la matrice di cambiamento di base fra 2 basi ortonormali é tale che ${}^tT = T^{-1}$]

Def: Una matrice $T \in GL(n, \mathbb{R})$ tale che ${}^tT = T^{-1}$ è detta matrice ortogonale

In particolare le righe/colonne di una matrice ortogonale sono un sistema di vettori ortonormale rispetto il prod. scal. std.

$$T = \begin{array}{c} \text{colonne} \\ \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \text{—} & C_n \end{pmatrix} \end{array}$$

$${}^tT = \begin{pmatrix} {}^tC_1 \\ {}^tC_2 \\ \vdots \\ {}^tC_n \end{pmatrix}$$

$${}^tT \cdot T = \begin{pmatrix} {}^tC_1 \cdot C_1 & {}^tC_1 \cdot C_2 & \dots & {}^tC_1 \cdot C_n \\ {}^tC_2 \cdot C_1 & {}^tC_2 \, C_2 & \dots & \\ \vdots & & & \\ {}^tC_n C_1 & \dots & & {}^tC_n \cdot C_n \end{pmatrix} = I$$

$$\Rightarrow {}^tC_1 C_1 = C_1 \cdot C_1 = 1$$

$${}^tC_1 \cdot C_2 = C_1 \cdot C_2 = 0$$

$$\vdots$$

$${}^tC_i C_j = C_i \cdot C_j = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

le righe/colonne di una matrice ortogonale devono anche avere tutte norma $= 1$

Teorema: Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ é ortogonalmente diagonalizzabile (cioé diagonalizzabile con matrice diagonalizzante ortogonale) se e solamente se $A = {}^tA$ (A é simmetrica).