Università degli Studi di Brescia
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione

α

Algebra Lineare e Geometria Analitica

Primo test intermedio - 05/11/2021

Cognome	Nome
Corso di Laurea	Matricola

Tutte le risposte devono essere riportate sul foglio e giustificate.

Quesiti

A) Si studi al variare del parametro reale k il sistema lineare in 4 incognite

$$\begin{cases} x+2y-kz+t=3 \\ -y+z-t=k \\ x+3y-(k+1)z+2t=4 \end{cases}$$

indicando quando esso è compatibile e determinandone il numero di soluzioni.

B) Si scriva un sistema lineare omogeneo di 3 equazioni in 4 incognite che ammetta ∞^2 soluzioni ed abbia fra esse il vettore $(0,-1,0,1)$.

C) Scrivere, se esiste, una matrice 4×4 di rango 3 con $1, 2$ fra gli autovalori o spiegare perché una siffatta matrice non esiste.

D) Sia $P_4[x](\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale dei polinomi in x di grado al più 4 e $\mathfrak{B}=(1,x,x^2,x^3,x^4-x^3)$. Si scrivano, se possibile, le componenti di x^4+x^2+2 rispetto a $\mathfrak{B}$.

E) Si determinino, se esistono, i valori del parametro reale k tali che la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 3k & 1 \\ k+1 & k+3 & 2k \end{pmatrix}$ abbia come autovalore 0 con molteplicità geometrica 2.

F) In $\mathbb{R}^{4,5}$ si determinino le possibili dimensioni della intersezione $U\cap W$ di due sottospazi di dimensione rispettivamente $\dim(U)=15$ e $\dim(W)=6$.

G) Si determini (giustificando la risposta) una base, se esiste, della copertura lineare dell'insieme delle soluzioni del sistema
$$\begin{cases} x-3y=0 \\ x+y-z=3 \end{cases}.$$

A)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -k & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & k \\ 1 & 3 & -k-1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$A \qquad B$

Il sistema é compatibile $\iff k=-1$ ed in tale caso ha $\infty^{4-2} = \infty^2$ sol.

III riga di A = I riga − II riga

$rk(A) = 2 \qquad rk(A|B) = 2 \iff k=-1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & k \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$= -4 + 2k - 3k + 3 = 0$

$k = -1$

$k = -1$

B) ci serve un sistema <u>omogeneo</u> (termini noti $=0$)

con rango $=2$ ma 3 eq.

$(0\ -1,0\ 1)$.

$$\begin{cases} x=0 \\ z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y+t=0 \\ x+y+t=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases}$$

NON VA BENE $\begin{cases} y=-1 \\ t=1 \end{cases}$ non è omogeneo.

$$\begin{cases} x=0 \\ z=0 \\ y+t=0 \end{cases} \to \infty^1 \text{ soluzioni} \quad \begin{cases} y-t=0 \\ x=0 \end{cases}$$

$(0\ -1\ 0\ 1)$ NON è sol.

c) A: 4×4 di rango 3 con $1, 2 \in \mathrm{Spec}(A)$

esiste. $rk(A) = 3 \Rightarrow 0 \in \mathrm{Spec}(A)$

e $m_g(0) = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 & 11 \\ & 2 & 8 & 6 \\ & & 3 & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

D)

$$\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3, x^4 - x^3)$$

$x^4 + x^2 + 2$ rispetto a $\mathcal{B}$.

$$x^4 + x^2 + 2 = a_1 \cdot 1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + a_5 (x^4 - x^3)$$

DEVE ESSERE $a_5 = 1 \Rightarrow a_4 = 1 \quad a_3 = 1$

$a_2 = 0 \quad a_1 = 2$

$$(2, 0, 1, 1, 1)$$

E) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 3k & 1 \\ k+1 & k+3 & 2k \end{pmatrix}$ abbia 0 come autovalore

con $m_g(0) = 2$

$\Rightarrow \; rk(A - 0I) = 3 - 2 = 1$

ci serve $rk(A) = 1$

$\cancel{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ k & 3k \end{vmatrix} = 0} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 1 - k^2 = 0$

$k = \pm 1 \longrightarrow \underset{k=+1}{rk} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 2$ No

$k = -1 \quad rk \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 2$ No

MAI

F)

$V = \mathbb{R}^{4.5} \qquad \dim(V) = 20$

$1 \leq \dim(\mathcal{U} \cap W) \leq 6$

con $\dim \mathcal{U} = 15, \quad \dim W = 6$

$15+6=21 \qquad 21-20=1$

6) $\begin{cases} x-3y=0 \\ x+y-z=3 \end{cases}$

$x=3y$

$z=4y-3$

$S=\{y(3\ 1\ 4)+(0\ 0\ -3) \mid y\in\mathbb{R}\}.$

S non ammette base perché S non è sottospazio vettoriale.

$\mathcal{L}(S)=\mathcal{L}((3\ 1\ 4),(0\ 0\ -3))$

ed una sua base è

$\mathcal{B}=((3\ 1\ 4),(0\ 0\ -3)).$

<u>oss</u>: Quand'è che la base non esiste per la copertura lineare dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare?

→ Quando $\mathcal{L}(S)=\{\underline{0}\}$.

cioè

- o $S=\{\underline{0}\} \Rightarrow$ sistema lineare omogeneo con esattamente 1 soluzione.

- o $S=\emptyset \Rightarrow$ sistema incompatibile.

$$\gamma: \begin{cases} x-3y=0 \\ x+y-z=1 \\ 2x-2y-z=3 \end{cases} \Rightarrow \text{incompatibile} \Rightarrow S=\emptyset \Rightarrow$$

$\Rightarrow \mathcal{L}(S)=\{\underline{0}\}$ e non ammette base.

Teorema spettrale

Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ una matrice reale e simmetrica $\Rightarrow$ tutti gli autovalori di A sono reali.

$$\overline{\det}(A-\lambda I) = \pm \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \xi_i) \quad \text{con } \xi_i \in \mathbb{R}$$

N.B. $\det(A-\lambda I)$ é un polinomio in λ di grado n.

DIM: facciamo vedere che $\bar{\lambda} = \lambda$ $\forall \lambda \in \mathrm{Spec}(A)$

significa $\lambda \in \mathbb{R}$

OSSERVIAMO CHE TUTTE LE RADICI DI $P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I)$ appartengono a $\mathbb{C}$ perché $\mathbb{C}$ é la chiusura alg. di $\mathbb{R}$.

Sia ora $\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(A)$

(A é reale ma λ lo considero in $\mathbb{C}$).

e sia dunque X un autovettore in $\mathbb{C}^n$ di autovalore λ.

calcolo

$$\boxed{\lambda \cdot {}^t X \overline{X}} = {}^t(\lambda X)\overline{X} =$$

$$= {}^t(AX)\overline{X} =$$

$$= {}^t X\, {}^t A\, \overline{X} = \qquad A = {}^t A$$

A simmetrica

$$= {}^t X A \overline{X} = \qquad A = \overline{A}$$

A reale

$$= {}^t X \overline{A}\, \overline{X} =$$

$$= {}^t X \overline{(AX)} =$$

$$= {}^t X \overline{(\lambda X)} = {}^t X \overline{\lambda}\, \overline{X} = \boxed{\overline{\lambda}\, {}^t X \overline{X}}$$

osserviamo che X autovettore $\Rightarrow X \neq \underline{0}$

in particolare se $X = {}^t(x_1 \text{———} x_n)$

$$\Rightarrow {}^t X \overline{X} = (x_1 \text{———} x_n)\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x}_i > 0$$

perché $z = a + ib \Rightarrow z\bar{z} = a^2 + b^2$
$a, b \in \mathbb{R}$

Ne segue che possiamo dividere per ${}^t X \bar{X}$ e otteniamo $\lambda = \bar{\lambda}$ cioè che $\lambda \in \mathbb{R}$ $\square$

__Teorema:__ Ogni matrice reale e simmetrica è diagonalizzabile (ortogonalmente).

Spazio vettoriale euclideo

→ __Forme bilineari__

__Def:__ Si dice in generale, dato $V(\mathbb{K})$ spazio vettoriale, forma qualche funzione che ha come codominio $\mathbb{K}$.

Forma lineare

$$f: V(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

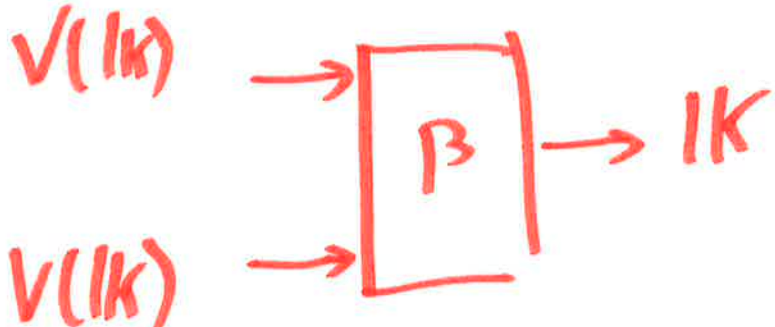
lineare

<u>Def</u>: Si dice che $\beta: V(\mathbb{K}) \times V(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ è una forma bilineare se:

$\forall\, a, b \in \mathbb{K}$, $\forall\, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V(\mathbb{K})$.

$$\beta(a\cdot\bar{x} + b\bar{y}, \bar{z}) = a\,\beta(\bar{x}, \bar{z}) + b\,\beta(\bar{y}, \bar{z}).$$

$$\beta(\bar{x}, a\bar{y} + b\bar{z}) = a\,\beta(\bar{x}, \bar{y}) + b\,\beta(\bar{x}, \bar{z}).$$



Se fissiamo uno degli argomenti di β ⇒ la funzione che si ottiene nell'altro argomento è lineare.

$$\beta : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \longrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{cases}$$

$\bar{x} = (a, b)$

$$f_{\bar{x}} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, y_1) \longrightarrow \beta(\bar{x}, (x_1, y_1)) =$$

$$= \beta((a, b), (x_1, y_1)) =$$

$$a y_1 - b x_1$$

$$g_{\bar{x}} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, y_1) \longrightarrow \beta((x_1, y_1), \bar{x}) = \end{cases}$$

$$= b x_1 - a y_1$$

Sia $f_{\bar{x}}$ che $g_{\bar{x}}$ sono lineari

e in generale $f_{\bar{x}} \neq g_{\bar{x}}$

Esercizio: verificare che valgono le proprietà.

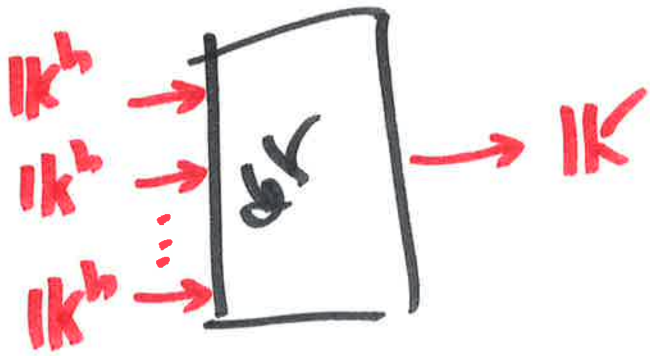
Esempio II:

$$\begin{cases} \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K} \\ (a,b),(c,d) \longrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \end{cases}$$

Il determinante è una funzione multilineare nelle righe/colonne.

$\Downarrow$

significa che se fissiamo $\forall$ riga/colonna tranne una otteniamo una funzione lineare.



Def:

Una funzione bilineare

$\beta : V(\mathbb{K}) \times V(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$

é detta • <u>alternante</u> se

$\forall \bar{x}, \bar{y} \in V(\mathbb{K}) : \beta(\bar{x}, \bar{y}) = -\beta(\cancel{\bar{x}}\bar{y}, \bar{x})$

• <u>simmetrica</u> se

$\forall \bar{x}, \bar{y} \in V(\mathbb{K}) : \beta(\bar{x}, \bar{y}) = \beta(\bar{y}, \bar{x})$

$\det : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$ é una forma bilineare alternante.

$\bullet : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$

$(x_1 \text{—} x_n), (y_1 \text{—} y_n) \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

forma bilineare simmetrica.

Def: Una forma bilineare simmetrica $V(\mathbb{K}) \times V(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ é detta <u>prodotto</u>

scalare.

La forma "$\cdot$" indicata sopra è detta prodotto scalare standard su $\mathbb{K}^n$.

N.B: prodotto scalare $V_n \times V_n \to \mathbb{K}$

$\neq$

prodotto per scalare $\mathbb{K} \times V \to V$

OSS: Sia $\beta : V(\mathbb{K}) \times V(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ una forma bilineare e sia $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 - \bar{e}_n)$ una base di $V(\mathbb{K})$.
Allora β è univocamente determinata dai valori che essa assume sulle coppie $(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$ con $\bar{e}_i, \bar{e}_j \in \mathcal{B}$.

Sia $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \text{ — } \bar{e}_n)$ e siano

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + \text{——} + x_n\bar{e}_n$$
$$\bar{y} = y_1\bar{e}_1 + \text{——} + y_n\bar{e}_n \qquad \in V_n(\mathbb{K})$$

$$\boxed{\beta(\bar{x},\bar{y})} = \beta\Big(\sum_i x_i\bar{e}_i, \sum y_j\bar{e}_j\Big) =$$
$$= \sum_i x_i\, \beta\Big(\bar{e}_i, \sum_j y_j\bar{e}_j\Big) =$$
$$= \sum_i x_i \sum_j y_j\, \beta(\bar{e}_i,\bar{e}_j) =$$
$$= \boxed{\sum_{i,j} x_i y_j\, \beta(\bar{e}_i,\bar{e}_j)}$$

pongo $B = \big(\beta(\bar{e}_i,\bar{e}_j)\big)_{i,j=1}^{n}$

matrice $n \times n$ e osservo che

$$(x_1 \text{ — } x_n)\, B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j} x_i y_j b_{ij}$$

rappresentazione matriciale di β

Sia $\beta : V_n(\mathbb{K}) \times V_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ una forma bilineare, $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 — \bar{e}_n)$ una base fissata di $V_n(\mathbb{K})$.

$\bar{x}$ ed $\bar{y}$ due vettori di $V_n(\mathbb{K})$ di componenti ${}^tX = (x_1 — x_n)$ ed ${}^tY = (y_1 — y_n)$ rispetto a $\mathcal{B}$, B la matrice associata a β ove $b_{ij} = \beta(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$

$$\Rightarrow \boxed{\beta(\bar{x}, \bar{y}) = {}^tXBY}$$

<u>OSS</u>: β é antisimmetrica $\Leftrightarrow {}^tB = -B$

β é simmetrica $\Leftrightarrow {}^tB = B$

β é il prodotto scalare std. di $\mathbb{K}^n$ $\Leftrightarrow B = I$ rispetto la base canonica di $\mathbb{K}^n$

$\beta : V_n(\mathbb{K}) \times V_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ simmetrica

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 - \bar{e}_n)$

$\Leftrightarrow$

$B = {}^tB$

DIM Supponiamo β simmetrica

$\Rightarrow \beta(\bar{x}, \bar{y}) = \beta(\bar{y}, \bar{x}) \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in V_n(\mathbb{K})$

in particolare $b_{ij} = \beta(\bar{e}_i, \bar{e}_j) =$

$= \beta(\bar{e}_j, \bar{e}_i) = b_{ji}$

$\Rightarrow B = {}^tB$

Viceversa: Supponiamo $B = {}^tB$

$\Rightarrow \beta(\bar{x}, \bar{y}) = {}^tXBY = {}^t({}^tXBY) =$

$= {}^tY\,{}^tBX = {}^tYBX = \beta(\bar{y}, \bar{x})$

$\square$

Concentreremo ora l'attenzione

sui prodotti scalari

In $V_n(\mathbb{K})$ siano $\bar{x}, \bar{y}$ due vettori

$\Rightarrow$ scriveremo $\bar{x} \perp \bar{y}$ se $\beta(\bar{x}, \bar{y}) = 0$

ove $\bar{x} \perp \bar{y}$ si legge "$\bar{x}$ ortogonale ad $\bar{y}$" oppure "$\bar{x}$ perp $\bar{y}$".

CAMBIAMENTI DI BASE.

→ B rappresenta β rispetto una base $\mathcal{B}$.

B' rappresenta β rispetto una base $\mathcal{B}'$ che legame c'è fra B e B'.

$$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \text{ — } \bar{e}_n) \qquad \mathcal{B}' = (\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_n)$$

$$E = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{pmatrix} \qquad \boxed{E' = TE} \qquad E' = \begin{pmatrix} \bar{e}'_1 \\ \vdots \\ \bar{e}'_n \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = {}^tE X = {}^tE' X' \qquad \bar{y} = {}^tE y = {}^tE' y'$$

$$\beta(x,y) = {}^tX B y =$$
$$= {}^tX' B' y'$$

$$x = {}^tE X = {}^tE' X' \text{ e } E' = TE$$

noi sappiamo

$$X = {}^tT X'$$
$$y = {}^tT y' \qquad \det T \neq 0$$

$\Rightarrow$ sostituiamo.

$${}^tX B y = {}^t({}^tT X') B ({}^tT y') =$$
$$= {}^tX' (\boxed{T B {}^tT}) y' =$$
$$= {}^tX' \boxed{B'} y'$$

$\boxed{B' = T B {}^tT}$ con T matrice di cambiamento di base.

#

Si è detto $\bar{x} \perp \bar{y} \iff \beta(\bar{x},\bar{y})=0$

Sia adesso $A \subseteq V(\mathbb{K})$.

Definiamo

$$A^{\perp} = \{ \bar{y} \mid \forall \bar{a} \in A : \bar{a} \perp \bar{y} \}.$$

<u>OSS</u>: 1) $A^{\perp}$ è un sottospazio vettoriale di $V_n(\mathbb{K})$.

<u>DIM</u>: Siano $\bar{x}, \bar{y} \in A^{\perp}$, $a, b \in \mathbb{K}$

$$\Rightarrow \beta(a\bar{x}+b\bar{y}, \bar{a}) =$$

$$= \cancel{\beta}\; a\,\beta(\bar{x},\bar{a}) + b\,\beta(\bar{y},\bar{a})$$

$\forall \bar{a} \in A$ ma $\beta(\bar{x},\bar{a}) = \beta(\bar{y},\bar{a}) = 0$

$$\Rightarrow a\bar{x}+b\bar{y} \perp \bar{a} \quad \forall \bar{a} \in A$$

$\Rightarrow A^{\perp}$ è sottospazio

2) Se $A \subseteq B \Rightarrow B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$

DIM: Se $A \subseteq B \Rightarrow$

$$B^{\perp} = \{\bar{y} \mid \bar{y} \perp \bar{b}, \forall \bar{b} \in B\}$$
$$\subseteq \{\bar{y} \mid \bar{y} \perp \bar{b}, \forall \bar{b} \in B \cap A\}$$
$$= \{\bar{y} \mid \bar{y} \perp \bar{b}, \forall \bar{a} \in A\} = A^{\perp}$$

3) Se $A = \mathcal{L}(X)$ allora

$$A^{\perp} = X^{\perp}$$

DIM: Se $A = \mathcal{L}(X) \Rightarrow X \subseteq A$

$$\Rightarrow A^{\perp} \subseteq X^{\perp}$$

facciamo vedere che

$\forall \bar{x} \in X^{\perp}$ si ha $\bar{x} \in A^{\perp}$

infatti se $\bar{w} \in X^{\perp}$ ed $X = \{\bar{x}_1 \dots \bar{x}_k \dots\}$

~~$\exists \alpha_1 \dots \alpha_k$ tali che~~

~~$\bar{w} = \alpha_1 \bar{x}_1 + \dots + \alpha_k \bar{x}_k$~~

Sappiamo che

$\forall \bar{x} \in X : \bar{w} \perp \bar{x}$

Sia ora $\bar{a} \in A$. Poiché

$\mathcal{L}(X) = A$ abbiamo $\exists \bar{x}_1 \dots \bar{x}_k \in X$

$\alpha_1 \dots \alpha_k \in \mathbb{K}$ tali che

$$\bar{a} = \alpha_1 \bar{x}_1 + \_\_\_ + \alpha_k \bar{x}_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta(\bar{w}, \bar{a}) = \sum_i \beta(\bar{w}, \alpha_i \bar{x}_i) =$$

$$= \sum \alpha_i \beta(\bar{w}, \bar{x}_i) = \sum \alpha_i \cdot 0 = 0$$

quindi $\bar{w} \perp \bar{a}$.

In particolare $\bar{w} \in A^\perp \Rightarrow$

$\Rightarrow X^\perp \subseteq A^\perp$ da cui $X^\perp = A^\perp$

$\square$

4) $A \subseteq A^{\perp\perp}$. Infatti sia

$\bar{a} \in A$ e $\bar{b} \in A^\perp$. In particolare

$\beta(\bar{a}, \bar{b}) = 0 \quad \forall \bar{a} \in A$, $\bar{a} \perp \bar{b}$

se la forma é simmetrica

$\Rightarrow \bar{b} \perp \bar{a}$ e in particolare

$\forall \bar{b} \in B$, $\bar{b} \perp \bar{a} \Rightarrow \bar{a} \in (A^{\perp})^{\perp}$

$\Rightarrow A \subseteq (A^{\perp\perp})$. $\square$

$A \subseteq A^{\perp\perp}$ ed in particolare

$$\boxed{\mathcal{L}(A) \subseteq A^{\perp\perp}}$$

perché $A^{\perp\perp}$ é spazio vettoriale.

In generale

$$\mathcal{L}(A) = A^{\perp\perp}$$

se e solamente se $\det B \neq 0$

ORTOGONALITÁ: $\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \beta(\bar{a}, \bar{b}) = 0$

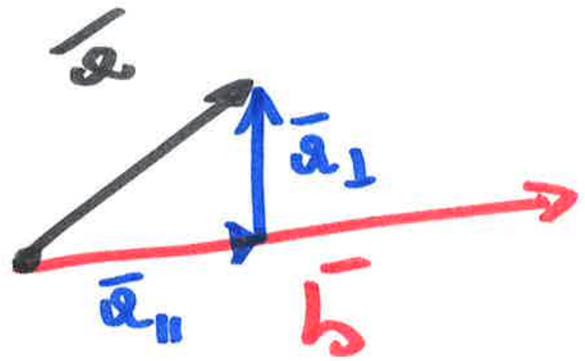
proiezione di un vettore su di un altro.

<u>Teorema</u>: Siano $\bar{a}, \bar{b} \in V_n(\mathbb{K})$ e β una forma bilineare simmetrica.

Supponiamo $\beta(\bar{b}, \bar{b}) \neq 0$

ALLORA È SEMPRE POSSIBILE SCRIVERE $\bar{a} = \bar{a}_{\parallel} + \bar{a}_{\perp}$

ove $\bar{a}_{\parallel} = \alpha \bar{b}$ e $\beta(\bar{a}_{\perp}, \bar{b}) = 0$



<u>DIM</u>: Sia $\bar{a}_{\parallel} := \dfrac{\beta(\bar{a}, \bar{b})}{\beta(\bar{b}, \bar{b})} \bar{b}$

poniamo $\bar{a}_{\perp} = \bar{a} - \bar{a}_{\parallel}$

che $\bar{a} = \bar{a}_{\parallel} + \bar{a}_{\perp}$ è ovvio come pure $\bar{a}_{\parallel}$ prop. a $\bar{b}$

mostriamo che $\bar{a}_\perp \perp b$

$$\beta(\bar{a}_\perp, \bar{b}) = \beta(\bar{a} - \bar{a}_\parallel, \bar{b}) =$$

$$= \beta(\bar{a}, \bar{b}) - \beta(\bar{a}_\parallel, \bar{b}) =$$

$$= \beta(\bar{a}, \bar{b}) - \frac{\beta(\bar{a}, b)}{\beta(\bar{b}, \bar{b})} \beta(\bar{b}, \bar{b}) =$$

$$= \beta(\bar{a}, \bar{b}) - \beta(\bar{a}, \bar{b}) = 0 \qquad \square$$

<u>Def</u>: Il valore $\dfrac{\beta(\bar{a}, \bar{b})}{\beta(\bar{b}, \bar{b})}$ è

detto <u>coeff. di Fourier</u>

di $\bar{a}$ nella direzione di $\bar{b}$.