Complemento diretto

$\mathcal{U} \leq V_n(\mathbb{K})$

si dice che X è complemento diretto di $\mathcal{U}$ se

$$\mathcal{U} \oplus X = V_n(\mathbb{K}).$$

quindi $\dim X = n - \dim \mathcal{U}$

$$\dim X \cap \mathcal{U} = 0$$

$\rightarrow$ BASE DI $\mathcal{U}$ $\rightarrow$ completa a base di $V_n(\mathbb{K})$

e pone $X = \mathcal{L}$(vettori aggiunti)

DIAGONALIZZAZIONE.

- $A \in \mathbb{K}^{n,n}$

→ calcolare gli autovalori di A

$\det(A - \lambda I) = 0$ eq. caratteristica

$m_a(\lambda)$ → # volte λ è radice dell'eq. caratteristica.

$m_g(\lambda) = n - rk(A - \lambda I) =$
$= \dim V_\lambda$

ove $V_\lambda = Ker(A - \lambda I)$

autospazio associato all'autoval. λ

→ $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$
$\forall \lambda \in Spec(A)$

→ A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow AP = PD$
con $P \in GL(n, \mathbb{K})$, D mat. diag.

$\Longleftrightarrow$ $\mathbb{K}^n$ ammette una base di autovettori per A.

$\downarrow$

questo vale $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\sum_{\lambda \in Spec(A)} m_g(\lambda) = n}$

(perché vogliamo $\displaystyle +_{\lambda \in Spec(A)} V_\lambda = \mathbb{K}^n$,

e gli autospazi sono in somma diretta $\Rightarrow$ $\bigoplus V_\lambda = \mathbb{K}^n$ $\Longleftrightarrow$

$\sum \dim V_\lambda = n$ $\Longleftrightarrow$ $\sum m_g(\lambda) = n$)

la condizione

$$\sum_{\lambda \in Spec(A)} m_g(\lambda) = n$$

è equivalente a dire (perché $m_a(\lambda) \geq m_g(\lambda)$).

$$(*)\quad \boxed{\sum_{\lambda \in Spec(A)} m_a(\lambda) = n \;\&\; \forall \lambda : m_a(\lambda) = m_g(\lambda)}$$

ogni autovalore è regolare

Da (*):

se $\sum_{\lambda \in Spec(A)} m_a(\lambda) < n \Rightarrow$ la matrice A non è diagonalizzabile.

In particolare se una radice del polinomio caratteristico $p_A(x) := \det(A - xI)$ non appartiene a $\mathbb{K} \Rightarrow$ A non è diagonalizzabile.

Es. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$

$$\det\left(A - x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = x^2 + 1$$

A non è diagonalizzabile in $\mathbb{R}^{2,2}$.

<u>N.B</u> $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}$

$\det\left(A - x\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right) = x^2+1 = (x+i)(x-i)$

ed A ha 2 autovalori di molt. algebrica 1 e geom 1

$\Rightarrow A$ é diagonalizzabile in $\mathbb{C}^{2,2}$

$A = \begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2,2}$

x^2-2 non ha radici in $\mathbb{Q}$.

<u>oss</u>: 1) Se $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ ha n autovalori distinti $\Rightarrow A$ é diagonalizzabile.

(perché $\sum_{\lambda \in Spec(A)} m_a(\lambda) = n$ & $m_g(\lambda) = m_a(\lambda) = 1$ $\forall \lambda$.

in quanto $1 \le m_g(\lambda) \le m_a(\lambda) = 1$).

$A = \begin{pmatrix} 1&7&5&3&9\\ 0&2&11&-1&6\\ 0&0&3&9&4\\ 0&0&0&8&6\\ 0&0&0&0&4 \end{pmatrix}$ é diagonalizzabile

$A' = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1&1\\0&1\end{matrix}}&\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\\ \begin{matrix}0&0\end{matrix}&8 \end{pmatrix}$ non é diagonalizzabile

$m_a(1) = 2 \neq m_g(1) = 1$

2) l'autospazio di autovalore 0 di A (se $0 \in \operatorname{Spec} A$) coincide con $\operatorname{Ker}(A) = V_0$

$$0 \in \operatorname{Spec} A \Rightarrow V_0 = \{X \mid (A - 0I)X = \underline{0}\} =$$
$$= \{X \mid AX = \underline{0}\} = \operatorname{Ker} A$$

$$m_g(0) = \dim \operatorname{Ker}(A) = \operatorname{null}(A) =$$
$$= n - rk(A)$$

Scrivere una matrice 3×3 con autovalori $1, 2, 5$ e rango (2) (se esiste, altrimenti giustificare la risposta).

rango 2 $\Rightarrow \operatorname{null}(A) = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dim V_0 = 1$ e 0 è autovalore di A $\to$ A dovrebbe avere autovalori $1, 2, 5$ e 0

$$\Rightarrow \sum_{\lambda \in Spec(A)} m_a(\lambda) \geq 4 > 3$$

↑ ordine della matrice.

ASSURDO! → Una matrice come quella richiesta <u>non esiste</u>.

Si scriva $A \in \mathbb{K}^{3,3}$ con $rk(A) = 1$ ed autovalori $1, 2, 0$.

Impossibile perché

$$m_g(1) \geq 1 \qquad m_g(0) = 3 - rk(A) = 2$$
$$m_g(2) \geq 1$$

ed avremmo dunque $\sum m_g(\lambda) \geq 4 > 3$.

ma $\sum m_g(\lambda) \leq 3$ fino . #

Esercizio. Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & k \end{pmatrix}$$

ammette il vettore $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

come autovettore; se $\exists$ tale k

si determini anche il

corrispondente autovalore.

$$A\bar{v} = \lambda \bar{v} \iff rk\left(A\bar{v} \,|\, \bar{v}\right) = 1$$

colonne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ k \end{pmatrix}$$

quando sono proporzionali?

MAI! $\rightarrow$ il k non esiste.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & K \end{pmatrix} \qquad \bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A'\bar{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ K \end{pmatrix}$$

quando $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ K \end{pmatrix}$ é prop. ad $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$?

$K=4$ ed in particolare anche l'autovalore corrispondente é $\lambda=4$

$$\mathrm{rk}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \\ K & 1 \end{bmatrix} = 1 \iff \det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ K & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff K=4$$

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & k & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

per quali valori è diag?

$k = -1 \rightarrow$ base di autovettori

<u>OSS:</u> se $k \neq 1, 2$ la matrice A è sicuramente diagonalizzabile perché ha 3 autovalori distinti.

<u>$K = 1$</u> $\quad m_a(1) = 2, \quad m_g(1) = 3 - rk \begin{pmatrix} 1-1 & 2 & 0 \\ 0 & 1-1 & 3 \\ 0 & 0 & 2-1 \end{pmatrix} =$

$$= 3 - rk \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

NON DIAG.

$K = 2 \quad m_a(2) = 2 \quad m_g(2) = 3 - rk \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$

NON DIAG.

RISPOSTA: $\forall k \neq 2, 1$

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Spec}(A) = \{1, -1, 2\}.$$

$$V_1 = \mathrm{Ker}(A - I) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$V_{-1} = \mathrm{Ker}(A + I) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

sistema: $\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}$

$$V_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = z \end{cases}$$

In particolare una base di autovettori per $\mathbb{R}^3$ é data da

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

→ una matrice diagonalizzante per A_{-1} é

autospazi

$$\rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con matrice diagonale

$$\rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

autovalori.

e $D = P^{-1}AP \rightarrow PD = AP$

Determinare $k \in \mathbb{R}$ tale che

$$2 \in \operatorname{Spec}\begin{pmatrix} -2 & k & 1 \\ 0 & 2 & k \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & k & 1 \\ 0 & 2-\lambda & k \\ 1 & 2 & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (-2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & k \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} k & 1 \\ 2-\lambda & k \end{pmatrix}$$

$= \dots =$ conti.

cerco le radici e guardo se 2 è fra esse.

MODO LUNGO!

2 è radice del polinomio caratteristico $\Leftrightarrow$

$$\det(A-2I)=0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} -4 & k & 1 \\ 0 & 0 & k \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow -k\begin{vmatrix} -4 & k \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow k(8+k)=0$$

In generale ricordare che

$$\lambda \in Spec(A) \iff \det(A-\lambda I)=0$$

quindi se si richiede che un certo $\bar{\lambda}$ sia un autovalore di A calcolare

$$\det(A-\bar{\lambda} I)$$

e vedere quando si annulla!

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & k-3 & 8 \\ k-10 & 2 & k-3 \end{pmatrix}$$

autovalori + valori di k per cui $\exists$ λ con $m_g(\lambda)=2$

$$\det(A-\lambda I)=0$$

$$\det(A-\lambda I)=(3-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} k-3-\lambda & 8 \\ 2 & k-3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)\cdot\left[(k-3-\lambda)^2-16\right] =$$

$$=(3-\lambda)(k-3-\lambda+4)(k-3-\lambda-4) =$$

$$=(3-\lambda)(k+1-\lambda)(k-7-\lambda).$$

GLI AUTOVALORI SONO

$$\mathrm{Spec}(A)=\{3,\ k+1,\ k-7\}.$$

ci si chiede quando $\exists\lambda$ con

$$m_g(\lambda)=2.$$

in particolare serve $m_a(\lambda)=2$

$\rightarrow$ deve essere $k+1=3$

oppure $k-7=3$

affinché $m_a(3)=2$

se $k \neq 2, 10 \Rightarrow$ NON ci sono autospazi DI DIM $=2$.

$$k=2 \rightarrow A_2=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-1&0\\-8&2&-1\end{pmatrix}$$

calcoliamo $m_g(3)=3-\mathrm{rk}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-4&0\\-8&2&-4\end{pmatrix}=1 \rightarrow$ NO!

$k=10$

$$A_{10} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & +7 & 8 \\ 0 & 2 & +7 \end{pmatrix}$$

$$m_g(3) = 3 - rk \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 3-1$$

$$= 2 \qquad \text{sì.}$$

Risposta $\underline{k=10}$

Matrice diagonalizzabile 4×4 non diagonale con autovalore 2 di molteplicità algebrica 2.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$P \in GL(4, \mathbb{K})$ $\quad P \neq I$

e calcola $PDP^{-1} = A$

$$P = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ 0 & 1 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$P^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ 0 & 1 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right)$$

ALTRO MODO

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ 0 & 2 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 3 & 1 \\ & & 0 & 4 \end{array}\right)$$

non diag.

4x4 NON DIAG CON

AUTOVALORI 0, 2, 3

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$m_a(0) = 2$

$m_g(0) = 1$

Senza autovalore 0 e autovalori 2 e 3 NON DIAG.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & 1 & 0 \\ & & 2 & 0 \\ 0 & & & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$\mathcal{U}, W \leq V_n(\mathbb{K})$

$\dim(\mathcal{U} \oplus W) = \dim \mathcal{U} + \dim W$

se $\dim \mathcal{U} + \dim W > n$
la somma non
può essere diretta

$\dim \mathcal{U} = 3 \quad \dim W = 5$
in $\mathbb{R}^7$

$3 + 5 = 8 > \cancel{5}7$
la somma non
può essere diretta.

$\dim \mathcal{U} = 3, \ \dim W = 2$

come trovarli.
prendere una base di $\mathbb{R}^7$
i primi 3 vettori generano
$\mathcal{U}$ e i IV e V generano
W. $\Rightarrow$ in questo caso
$\mathcal{U} \cap W = \{0\}$.

$H = \{(4a+b, 0, 3a, 6a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

$K = \{(h+3k, h, k-h, 2k+2h) \mid k, h \in \mathbb{R}\}$.

$H = \mathcal{L}((4\ 0\ 3\ 6), (1\ 0\ 0\ 0))$

$K = \mathcal{L}((1\ 1\ -1\ 2), (3\ 0\ 1\ 2))$.

$H \oplus K \iff \dim(H+K) = \dim H + \dim K$

$\dim(H) = 2 \qquad \dim K = 2.$

$H \oplus K$ diretta $\iff rk \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 4$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$\dim(H+K) = 3 < 2+2$ la somma non e' diretta.

$$U = \{(x,y,z,t) \mid x=y, \; z=0\}.$$

$$W = \{(x,y,z,t) \mid x=y-t, \; x=0\}.$$

la somma non è diretta

$\dim U = 3 \qquad \dim W = 2$

$$3+2>4$$

con eq. rossa. $\dim U = 2$

$\dim W = 2$

Studiamo $U \cap W$

$$\begin{cases} x-y=0 \\ z=0 \\ y-t=0 \\ x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \\ t=0 \end{cases}$$

$U \cap W = \{\underline{0}\} \Rightarrow$ somma diretta.

$U = \{(x, y, z, t) \mid x - y = 0 \quad x + y + t = 0\}$.

$W = \mathcal{L}((1\,0\,1\,0), (0\,1\,1\,1))$.

$U \oplus W$? <u>sì</u>

$$U = \{(x\ x, z, -2x) \mid x, z \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \mathcal{L}((1\ 1\ 0\ -2), (0\ 0\ 1\ 0)).$$

$$rk\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

1020 $\det = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

problemi per diagonalizzare.

1) $\exists\ \lambda$ radice del polinomio caratteristico che non è in $\mathbb{K}$.

(~~non tutte le ra~~

$\left(\sum m_a(\lambda) < n\right)$.

si può pro[illegible] in un campo più grande.

2) $\exists\ \lambda \in Spec(A) : m_a(\lambda) \neq m_g(\lambda)$.

forme canoniche

(si cercano delle matrici "le più vicine possibili a matrici diagonali" simili alla matrice di partenza).

Def: Un campo $\mathbb{K}$ è detto algebricamente chiuso se ogni polinomio non costante a coeff. in $\mathbb{K}$ ammette almeno una radice in $\mathbb{K}$.

OSS: Sia $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ un polinomio

(insieme di tutti i polinomi in x a coeff. in $\mathbb{K}$)

di grado n con $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso $\Rightarrow p(x)$ ha n radici (non necessariamente distinte) in $\mathbb{K}$. In particolare si scrive

$$\boxed{p(x) = \alpha_0 \prod_{i=1}^{n} (x - \lambda_i)}$$

(cioè $p(x)$ si spezza in fattori di primo grado).

DIM: Se $\deg p(x) = 1 \Rightarrow$ $\quad a \neq 0$

$$p(x) = a(x - \alpha)$$ e

quindi $p(\alpha) = 0$ e $p(x)$ ha 1 radice.

Supponiamo che ogni polinomio di grado $n-1$ abbia $n-1$ radici in $\mathbb{K}$ e $\deg p(x) = n$

$\Rightarrow$ per def. di $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso $\exists\, \alpha \in \mathbb{K}$ tale che $p(\alpha) = 0 \Rightarrow$ poiché $\mathbb{K}$ campo (per il teorema di Ruffini).

$$p(x) = q(x)(x - \alpha)$$

con $\deg q(x) = n - 1$

$\Rightarrow$ $q(x)$ ha $n-1$ radici

$p(x)$ ha $(n-1) + 1 = n$ radici $\square$

Teorema: Sia $\mathbb{K}$ un campo $\Rightarrow$ esiste un campo $\overline{\mathbb{K}}$ con $\mathbb{K} \subseteq \overline{\mathbb{K}}$ algebricamente chiuso, detto la chiusura algebrica di $\mathbb{K}$.
(il più piccolo campo a.c. che contiene $\mathbb{K}$).

Teorema (fondamentale dell'algebra).
La chiusura algebrica di $\mathbb{R}$ è $\mathbb{C}$.

In particolare ogni polinomio di grado n a coeff. in $\mathbb{C}$ si spezza (fattorizza) nel prodotto di polinomi di I grado.

$$\mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}.$$

$z \in \mathbb{C}$ come $z = a + ib$, $a,b \in \mathbb{R}$
$i^2 = -1$

Mettiamoci in $\mathbb{R}^{2,2}$ e siano

$$\underline{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

chiamiamo $\underline{\mathbb{C}} = \mathcal{L}(\underline{1}, \underline{i})$

$$\underline{i}^2 = -\underline{1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$a\underline{1} + b\underline{i} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

1) osservo che $\det(a\underline{1} + b\underline{i}) = a^2 + b^2$

e quindi tutte le matrici $\neq \underline{0}$ che appartengono a $\underline{\mathbb{C}}$ sono invertibili.

2) $$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix}$$

il prodotto di 2 matrici in $\underline{\mathbb{C}}$ è una matrice in $\underline{\mathbb{C}}$ e tale prod.

è commutativo.

In particolare

$$(a\cdot\underline{1} + b\,\underline{i})(c\cdot\underline{1} + d\,\underline{i}) =$$

$$= (ac-bd)\cdot\underline{1} + (bc+ad)\cdot\underline{i}$$

3) l'inversa di una matrice

$$\underline{0} \neq \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ cioè}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{a^2+b^2}$$

è ancora un elemento di $\underline{\mathbb{C}}$

DA QUESTE PROPRIETÀ +

LE PROPRIETÀ DEL PROD.

DI MATRICI (ASSOCIATIVA + DIST.)

SEGUE CHE $\underline{\mathbb{C}}$ È UN

campo.

in particolare $z = a \cdot \underline{1} + b\,\underline{i}$ lo scriveremo come $z = a + ib$

$\ulcorner \cancel{K((t)) = \{ \sum_{-\infty}^{+\infty} a_i t^i \mid a_i \in \mathbb{C} \}} \lrcorner$

In $\mathbb{C}$ esiste un automorfismo che fissa il campo $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

dato $z = a + ib \longrightarrow$

definiamo $\bar{z} := a - ib$.

(z coniugato).

OSS: 1) $z = \bar{z} \iff b = 0$ cioè $z \in \mathbb{R}$

2) $z = a + ib \quad w = c + id \Rightarrow$

Automorfismo

$$\overline{z + w} = (a + c) - (b + d)i =$$

$$= \bar{z} + \bar{w}$$

$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

3) poniamo $|z| := \sqrt{z\bar{z}} =$

$= \sqrt{(a+ib)(a-ib)} = \sqrt{a^2+b^2} \geq 0$

con $a, b \in \mathbb{R}$

N.B. $|z| = \sqrt{\det\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}}$

4) $z^{-1} \sim \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{a^2+b^2} \sim$

$= \bar{z} \cdot \frac{1}{z\bar{z}}$ $\in \mathbb{R}$

infatti $z \cdot \left(\bar{z} \frac{1}{z\bar{z}}\right) = \frac{z\bar{z}}{z\bar{z}} = 1$

5) Sia $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio a coeff. in $\mathbb{C}$.

$\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{C}: \overline{f(\alpha)} = \bar{f}(\bar{\alpha})$

per le proprietà di prima.

in particolare se i coeff. di f sono in $\mathbb{R} \Rightarrow \overline{f(\alpha)} = \bar{f}(\bar{\alpha}) = f(\bar{\alpha})$

ne segue che se $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ ed α é una radice di $f(x) \Rightarrow$

$0 = f(\alpha) = f(\bar{\alpha}) = 0$

cioé se un polinomio reale ha α come radice $\alpha \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ esso ha anche $\bar{\alpha}$ come radice.

CONSEGUENZA PER LE MATRICI

Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n} \Rightarrow$ il polinomio caratteristico di A é un polinomio a coeff. in $\mathbb{R}$.

Sia λ un autovalore di A in $\mathbb{C}$

$\Rightarrow \quad p_A(\lambda) = 0 \Rightarrow p_A(\bar{\lambda}) = 0$

$\Rightarrow \bar{\lambda}$ é autovalore di A.

Inoltre se X é un autovettore di A

di autovalore λ noi $X \neq \underline{0}$

abbiamo

$$AX = \lambda X$$

$$\Rightarrow \quad \overline{AX} = \overline{\lambda X} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{A}\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X} \quad \text{ma } A \in \mathbb{R}^{n,n} \Rightarrow$$

$$A = \bar{A}$$

$$\Rightarrow A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$$

In sintesi:

Se $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ha un autovalore $\lambda \in \mathbb{C}$ di autovettore $X \Rightarrow$
$\Rightarrow \bar{X}$ è un autovettore di A di autovalore $\bar{\lambda}$

Teorema della base spettrale:

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ con ${}^tA = A$ è sempre (ortogonalmente) diagonalizzabile