DIAGONALIZZAZIONE.

$A \in \mathbb{K}^{n,n}$ $\qquad f_A \begin{cases} \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ X \longrightarrow AX \end{cases}$

$\exists$ dei vettori $X \neq \underline{0}$ tali che

$$AX = \lambda X \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{K}?$$

Def: X é detto <u>autovettore</u> di <u>autovalore</u> λ per la matrice A se $X \neq \underline{0}$ e $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tale che

$$AX = \lambda X$$

(eigenvector / eigenvalue).

OSSERVA $\bar{X}$ autovettore

$\iff \bar{X} \neq \underline{0}$ ed $(A - \lambda I)\bar{X} = \underline{0}$

Questo significa che $\bar{X}$ deve essere una soluzione non banale del sistema lineare

$$(A - \lambda I)X = \underline{0}$$

sistema lineare omogeneo di
n equazioni in n incognite.

$\Downarrow$

questo sistema ammette sempre
soluzioni ma ci sono soluzioni
non banali (= autosoluzioni =
soluzioni $\neq \underline{0}$) se e solamente se
il sistema non é di Cramer

$\Leftrightarrow \quad rk(A - \lambda I) < n$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$

Def: Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. Si dice
polinomio caratteristico di A
$$p_A(x) := \det(A - xI)$$
equazione caratteristica di A
$$p_A(x) = 0$$

oss: Gli autovalori di A sono
tutte e sole le radici in $\mathbb{K}$

della equazione caratteristica

Def: Chiamiamo spettro di A l'insieme di tutti gli autovalori di A

$$\mathrm{Spec}(A) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \det(A - \lambda I) = 0\}.$$

Un autovettore di A è un vettore $X \neq \underline{0}$ tale che $\exists \lambda \in \mathrm{Spec}(A)$ con $(A - \lambda I)X = \underline{0}$

CONSEGUENZA:

1) Sia $\lambda \in \mathrm{Spec}(A) \Rightarrow$

$$V_\lambda := \{X \mid AX = \lambda X\}.$$

è detto autospazio associato all'autovalore λ ed è uno spazio vettoriale (in questo i cui elementi sono tutte e sole le soluzioni di $(A - \lambda I)X = \underline{0}$)

formato da tutti gli autovettori di A di autovalore λ unito $\{\underline{0}\}$.

2) $m_g(\lambda) := \dim V_\lambda$ è detta <u>molteplicità geometrica</u> di λ

e $1 \leq m_g(\lambda) \leq n$

$$m_g \leq n \Leftarrow V_\lambda \leq \mathbb{K}^n$$

N.B. $m_g(\lambda) \geq 1$ perché

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow rk(A - \lambda I) < n$$

$\Rightarrow$ per nullità più rango.

$$\dim V_\lambda = n - rk(A - \lambda I) \geq 1$$

$$m_g(\lambda) := n - rk(A - \lambda I) =$$
$$= null(A - \lambda I)$$

$V_\lambda = Ker(A - \lambda I)$

Def: $\lambda \in \mathrm{Spec}(A) \Rightarrow$ si dice molteplicità algebrica di λ il numero di volte che λ è radice dell'equazione caratteristica $\det(A - xI) = 0$

[vuol dire che $(x-\lambda)^{m_a(\lambda)}$ divide $p_A(x)$ ma $(x-\lambda)^{m_a(\lambda)+1}$ non divide $p_A(x)$]

$m_a(\lambda)$ = molteplicità algebrica di λ.

OSS: $1 \leq m_a(\lambda) \leq n$

perché λ è radice di $p_A(x) = 0$

perché $p_A(x)$ è un polinomio di grado n

Vogliamo, data A, determinare i suoi autospazi

→ ci basta cercare una base degli autospazi stessi.

Def: Una matrice A è detta **diagonalizzabile** se $\mathbb{K}^n$ ammette una base di autovettori per A

→ Dobbiamo cercare gli autovettori.

1) Si calcolano gli autovalori di A

$$\mathrm{Spec}(A)$$

risolvendo l'eq. caratteristica

2) $\forall \lambda \in \mathrm{Spec}(A)$ si cerca l'autospazio corrispondente

$$V_\lambda = \{ X \mid (A - \lambda I)X = \underline{0} \}$$

DIMOSTREREMO

A) che $\forall \lambda \in Spec(A)$

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \leq n$$

B) che gli autospazi V_λ sono in somma diretta fra loro.

C) che A é diagonalizzabile $\iff$

$$\dim \bigoplus_{\lambda \in Spec A} V_\lambda = n$$

$$\iff \sum_{\lambda \in Spec(A)} m_g(\lambda) = n$$

$$\iff \sum m_a(\lambda) = n \ \& \ \forall \lambda \in Spec(A) : m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$$

ogni autovalore é regolare.

Siano $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$.

Si dice che A e B sono <u>simili</u> se $\exists\, P \in GL(n, \mathbb{K})$ tale

invertibile

che
$$AP = PB$$
(oppure $P^{-1}AP = B$)

Esercizio (se volete). Dimostrare che la relazione di similitudine fra matrici è una relazione di equivalenza.

<u>OSS</u>: Una matrice A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ A è simile ad una matrice diagonale D.

<u>DIM</u>: Sia A diagonalizzabile

$\Rightarrow \exists\, \mathcal{B} = (P_1 \text{ — } P_n)$ base di autovettori per $\mathbb{K}^n$

con $AP_i = \lambda_i P$

poniamo $P = (P_1 \text{---} P_n)$
la matrice che ha i P_i
come colonne. $\Rightarrow \det P \neq 0$
perché le colonne di P sono
una base. Inoltre

$$AP = (AP_1 \text{---} AP_n) =$$

$$= (\lambda_1 P_1 \text{---} \lambda_n P_n) =$$

$$= PD \text{ dove } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ A è simile ad una matrice
diagonale.

Viceversa: Supponiamo
$$AP = PD \text{ con } \det(P) \neq 0$$
e $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ diagonale.

$\Rightarrow$ indichiamo con P_i la i-esima colonna di P e vediamo subito che

$$AP_i = \lambda_i P_i$$

$\Rightarrow$ tutte le colonne di P sono autovettori di $A \Rightarrow \mathbb{K}^n$ ammette una base di autovettori di A (data proprio da queste colonne) $\square$

Teorema: $\forall A \in \mathbb{K}^{n,n}, \lambda \in \mathrm{Spec}(A)$

$$m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

DIM: Sia A la matrice data $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$ e poniamo

$k = \dim V_\lambda$.

Siano $(P_1 — P_k)$ una base di V_λ

$V_\lambda \le \mathbb{K}^n$ e quindi possiamo completare a base di $\mathbb{K}^n$

$$(P_1 \ldots P_k) \to \mathcal{B}' = (P_1 \ldots P_k Q_1 \ldots Q_{n-k})$$

Sia $R = (P_1 \ldots P_k Q_1 \ldots Q_{n-k})$

e calcoliamo

$$AR = (AP_1 \ldots AP_k AQ_1 \ldots AQ_{n-k})$$

$$= (\lambda P_1 \ldots \lambda P_k AQ_1 \ldots AQ_{n-k})$$

$$= \cancel{(P_1 \ldots P_k X_1 \ldots X_{n-k}) \cdot 2}$$

$$= (P_1 \ldots P_k Q_1 \ldots Q_{n-k}) \cdot S$$

con $S = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix} & X \\ \hline 0 & Y \end{array}\right)$

le colonne del secondo pezzo sono del tipo

$$R^{-1}AQ_i$$

In particolare A risulta essere simile alla matrice S perché $AR = RS$ ed

$$S = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & & \\ & \ddots & & X \\ & & \lambda & \\ \hline & 0 & & Y \end{array}\right)$$

consideriamo $\det(S - xI) =$

$$= \det\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda - x & & & \\ & \ddots & & X \\ & & \lambda - x & \\ \hline & & & Y - xI \end{array}\right) = (\lambda - x)^k \det(Y - xI)$$

In particolare λ ha molteplicità algebrica almeno k in S.

Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico, quindi: $p_A(x) = p_S(x)$ e dunque $(\lambda - x)^k$ divide anche $p_A(x)$

da cui $m_a(\lambda) \geq k$.

<u>DIM</u>: Se A simile ad $S \Rightarrow$

$\exists R$ tale che

$$S = R^{-1} A R$$

$$\Rightarrow \det(S - xI) = \det(R^{-1}AR - xR^{-1}R)$$

$$= \det(R^{-1}) \cdot \det(A - xI) \cdot \det(R) =$$

$$= \det(A - xI) \qquad \square$$

In particolare A ed S hanno gli stessi autovalori e lo stesso determinante $\Rightarrow$

$$p_A(0) = p_S(0)$$

$(x-\lambda)$ divide almeno k volte il polinomio caratteristico di S
$\Rightarrow$ divide almeno k volte il polinomio caratteristico di A $\Rightarrow$ $m_a(\lambda) \geq k = m_g(\lambda)$ $\square$

CONSEGUENZA

1) Se $\sum_{\lambda \in Spec(A)} m_a(\lambda) < n \Rightarrow$ la matrice A non é diagonalizzabile.

perché $\sum m_g(\lambda) \leq \sum m_a(\lambda) < n$ e sicuramente una base di $\mathbb{K}^n$ di autospazi da $+V_\lambda$ non si può estrarre.

→ Affinché A sia diagonalizzabile, tutti i suoi autovalori devono essere in $\mathbb{K}$

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \Rightarrow \det(A - xI) = x^2 + 1$$

A non é diagonalizzabile

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} \Rightarrow \mathrm{Spec}(A) = \{-i, +i\}.$$

__Teorema__: Gli autospazi di A sono in somma diretta.

RICHIAMI SULLA SOMMA DIRETTA

Cosa significa $X \oplus Y$?

$X \oplus Y$ se ogni vettore di $X + Y$ si scrive in modo unico come $\bar{v} = \bar{x} + \bar{y}$ con $\bar{x} \in X, \bar{y} \in Y$.

ed é equivalente a verificare

$$X \cap Y = \{\underline{0}\}.$$

Si dice che $X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_K$

se ogni vettore $\bar{v}$ della somma

$$X_1 + X_2 + \_\_\_ + X_K$$

si scrive in modo unico

come $\bar{v} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \_\_\_ + \bar{x}_K$

con $\bar{x}_i \in X_i$

(in particolare

$$\dim_{\mathbb{R}} \left(\bigoplus_i X_i\right) = \sum_i \dim(X_i))$$

questo implica che $X_i \cap X_j = \{\underline{0}\}$.

$i \neq j$ ma in realtà la condizione

é più forte.

$\mathbb{R}^2$ $\quad X_1 = \mathcal{L}((1\,0))$ $\quad X_2 = \mathcal{L}((0\,1))$

$$X_3 = \mathcal{L}((1\,1))$$

si puó verificare che la somma

$\bigoplus_{i \leq h} X_i$ é diretta se $\bigoplus_{i \leq h-1} X_i$ é diretta

$$e \left(\bigoplus_{i \le n-1} X_i \right) \cap X_n = \{\underline{0}\}.$$

<u>**DIM**</u> per induzione sul numero di autospazi distinti.

$n=2$: $\lambda_1, \lambda_2 \in Spec(A)$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = (Ker(A-\lambda_1 I) \cap Ker(A-\lambda_2 I) =$$

$$= \{ X \mid (A-\lambda_1 I)X = \underline{0} = (A-\lambda_2 I)X \}.$$

$$\|$$

$$\{ X \mid AX = \lambda_1 X \; \& \; AX = \lambda_2 X \}.$$

$$\Rightarrow \{ X \mid \lambda_1 X = \lambda_2 X \} =$$

$$= \{ X \mid (\lambda_1 - \lambda_2) X = \underline{0} \}.$$

ma noi abbiamo $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow$

$$(\lambda_1 - \lambda_2) X = \underline{0} \Rightarrow X = \underline{0} \Rightarrow V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}$$

Supponiamo la proprietà valga per $(n-1)$ autospazi $\Rightarrow$ mostriamo che vale per n autospazi distinti

per assurdo. Siano $V_{\lambda_1} \_\_ V_{\lambda_n}$ i nostri n autospazi distinti e supponiamo la somma non sia diretta.

$\Rightarrow$ $X \in V_{\lambda_1} + \_\_ + V_{\lambda_n}$ tale che

$$X = X_1 + \_\_ + X_n =$$
$$= y_1 + \_\_ + y_n$$

con almeno un $X_i \neq y_i$

e $X_i, y_i \in V_{\lambda_i}$

$$AX = A(X_1 + \_\_ + X_n) =$$
$$= \lambda_1 X_1 + \_\_ + \lambda_n X =$$
$$= A(y_1 + \_\_ + y_n) =$$
$$= \lambda_1 y_1 + \_\_ + \lambda_n y_n$$

$$\lambda_1 X = \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_1 X_n$$
$$= \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_1 y_n$$

$$(A - \lambda_1 I) X =$$
$$(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n) -$$
$$(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_1 X_n) =$$
$$= \underline{(\lambda_2 - \lambda_1) X_2 + \dots + (\lambda_n - \lambda_1) X_n}$$

$$= (\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n) -$$
$$(\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_1 y_n) =$$
$$= \underline{(\lambda_2 - \lambda_1) y_2 + \dots + (\lambda_n - \lambda_1) y_n}$$

I due vettori così appartengono

a $\underbrace{V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n}}_{n-1 \text{ autospazi}} \Rightarrow$

$$(\lambda_i - \lambda_1) X_i = (\lambda_i - \lambda_1) y_i \quad i > 1$$

$\Rightarrow$ visto che $\lambda_i - \lambda_1 \neq 0$ segue

$$x_i = y_i \quad \forall i > 1$$

Torniamo ad X

$$X = x_1 + x_2 + \dots + x_n =$$
$$= y_1 + y_2 + \dots + y_n =$$
$$= y_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$\Rightarrow x_1 = y_1$

e quindi X si scrive in modo unico $\lightning$ contro l'ipotesi che la somma non fosse diretta $\Rightarrow$

Th: la somma è diretta $\square$

Corollario: A è diagonalizzabile

$$\Leftrightarrow \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(A)} m_g(\lambda) = n$$