Teorema nullità + rango

Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$. Poniamo

$$\operatorname{null}(A) := \dim \operatorname{Ker} A =$$

$$= \dim \{ X \mid AX = \underline{0} \}.$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{null}(A) + rk(A) = n$$

$$\underline{\operatorname{null}(A) = n - rk(A)}$$

<u>DIM</u>: Consideriamo

$$f_A : \begin{cases} \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m \\ X \longrightarrow AX \end{cases}$$

~~Sia~~ Consideriamo $\operatorname{Ker}(A) =$

$$= \{ X \mid AX = \underline{0} \}.$$

Due possibilità:

1) $\operatorname{Ker}(A) = \{\underline{0}\}. \Rightarrow rk(A) = n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \operatorname{null}(A) + rk(A) = n$$

2) $\mathrm{Ker}(A) \leq \mathbb{K}^n$ non banale

$\Rightarrow$ Sia $(\bar{v}_1 — \bar{v}_e)$ una base di $\mathrm{Ker}(A)$ e completiamo tale base a base di $\mathbb{K}^n$ aggiungendo $n-e$ vettori

$$(\underbrace{\bar{v}_1 — \bar{v}_e}_{\text{Base di Ker} A} \; \bar{w}_1 — \bar{w}_{n-e})$$

OSSERVIAMO CHE

1) $\mathrm{Im}\, f_A = \mathcal{L}(f_A(\bar{v}_1) — f_A(\bar{v}_e),$
$f_A(\bar{w}_1) — f_A(w_{n-e})) =$

$= \mathcal{L}(\underline{0} — \underline{0}, f_A(\bar{w}_1) — f_A(\bar{w}_{n-e}))$

$= \mathcal{L}(f_A(\bar{w}_1) — f_A(\bar{w}_{n-e})).$

2) Sappiamo inoltre che

$\dim \mathrm{Im}\, f_A = rk(A)$

per avere la tesi dobbiamo far vedere che $(f_A(\bar{w}_1) \ldots f_A(\bar{w}_{n-\ell}))$ è una sequenza libera

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f_A = n-\ell$ e

dunque $n = \underbrace{(n-\ell)}_{rk(A)} + \underbrace{\ell}_{null(A)}$

$$\underline{0} = \alpha_1 f_A(\bar{w}_1) + \ldots + \alpha_{n-\ell} f_A(\bar{w}_{n-\ell}) =$$

$$= f_A(\alpha_1 \bar{w}_1 + \ldots + \alpha_{n-\ell} \bar{w}_{n-\ell})$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \bar{w}_1 + \ldots + \alpha_{n-\ell} \bar{w}_{n-\ell} \in \operatorname{Ker} A$$

se $(\alpha_1, \ldots \alpha_{n-\ell}) \neq \underline{0}$

$$\alpha_1 \bar{w}_1 + \ldots + \alpha_{n-\ell} \bar{w}_{n-\ell} = \beta_1 \bar{v}_1 + \ldots + \beta_\ell \bar{v}_\ell$$

con $(\beta_1 \ldots \beta_\ell) \neq \underline{0}$

ASSURDO PERCHÉ $\alpha_1 \bar{w}_1 + \ldots + \alpha_{n-\ell} \bar{w}_{n-\ell}$ SI SCRIVEREBBE IN 2 MODI DISTINTI RISPETTO una base di $\mathbb{K}^n \Rightarrow$

In particolare $f_A(\overline{w}_1)$ — $f_A(\overline{w}_{n-\ell})$

libera $\Rightarrow rk(A) = n - \ell$ $\square$

Applicazione ai sistemi lineari e loro discussione.

Sia $AX = B$ un sistema lineare.

1) è compatibile?

R/C : $rk(A) = rk(A|B)$?

→ sì → continuiamo
→ No → fine.

2) se compatibile, quante soluzioni ha?

$$\infty^{n-K}$$

ove n = numero di incognite

$K = rk(A) = rk(A|B)$

(con la posizione $\infty^0 = 1$)

3) Trovare le soluzioni (se richiesto)

→ 3.1 Trovare Ker A = = soluzioni del sistema omogeneo associato

3.2 Trovare una soluzione particolare.

→ Metodo standard: Eliminazione Gaussiana.

→ Altro metodo: trovare un sistema fondamentale equivalente in cui tutte le righe (eq.) sono indip. → risolverlo come un sistema parametrico di Cramer.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ \qquad 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 \qquad + 2x_4 + x_5 = 1 \\ \qquad 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Si tengono solo le righe che corrispondono al minore che dà il rango.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

lascio a sx solo le colonne che corr. al minore

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 - x_3 - x_4 - x_5 \\ 3x_2 = 0 - x_3 + x_4 \end{cases}$$

$x_4 = x_4 \qquad x_5 = x_5$

$x_3 = x_3$

$$\begin{cases} x_2 = (-x_3 + x_4)\frac{1}{3} \\ x_1 = 1 - x_3 - x_4 - x_5 - \frac{2}{3}(-x_3 + x_4) \end{cases}$$

Il minore indicato in rosso è detto minore fondamentale.

Esercizi

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ ed $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

Trovare l'insieme dei vettori colonna $B \in \mathbb{K}^3$ tali che $AX = B$ sia compatibile.

$$S = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \cancel{\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ base di } S.$$

Si scriva un sistema lineare in 3 equazioni e 2 incognite con ∞^1 soluzioni.

$$AX = B$$

$$rk(A) = rk(A|B) = 2 - 1 = 1$$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 2 \\ 3x - 3y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Si scriva un sistema lineare in 3 incognite con ∞^4 soluzioni

$\downarrow$

NON ESISTE!

perché $\dim \operatorname{Ker}(A) \leq n$

$(\operatorname{Ker}(A) \leq \mathbb{K}^n)$

Si scriva un sistema lineare in 3 incognite il cui insieme delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di dim $= 1$

$$AX = B$$

1) Il sistema deve essere omogeneo.

$\Rightarrow B = \underline{0}$

2) $n - k = 3 - rk(A) = 1 \rightarrow rk(A) = 2$

$$\begin{cases} x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0 \\ 0 \cdot x + y + 0 \cdot z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

nelle incognite (x, y, z)

• Si scriva un sistema lineare in 4 incognite che ammetta ${}^t(1\ 2\ 3\ 0)$ come soluzione ed abbia ∞^2 soluzioni.

• $AX = B$ con $n = 4$ $\quad n - k = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = 2$

sistema lineare compatibile con descritto da 2 equazioni indipendenti.

• Su B non ci sono ipotesi

$\Rightarrow B = \underline{0}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (*) \begin{cases} a_{11} + 2a_{12} + 3a_{13} = 0 \\ a_{21} + 2a_{22} + 3a_{33} = 0 \end{cases}$$

una possibile sol. è

$$(1,1,-1,0) = (a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14})$$
$$(1,1,-1\ 1) = (a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{24})$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

<u>N.B</u> (*) ha ∞^3 soluzioni

E se si fosse chiesto un sistema <u>non</u> omogeneo?

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \neq \underline{0} \qquad \begin{cases} a_{11} + 2a_{12} + 3a_{13} = 1 \\ a_{21} + 2a_{22} + 3a_{23} = 0 \end{cases}$$

Si scrivano tutti i sistemi lineari omogenei ~~[illegible]~~ in 3 incognite che ammettono il vettore $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ come soluzione.

$$AX = \underline{0}$$

OSSERVIAMO

1) che un sistema omogeneo in 3 incognite è sempre equivalente ad un sistema in 3 incognite formato da al più 3 equazioni.

2) Un sistema che ammette $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ come soluzione è formato da eq. che ammettono tutte $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ come soluzione.

Studiamo l'insieme delle equazioni omogenee in x, y, z che ammettono ${}^t(1\ 0\ 1)$ come soluzione.

$$ax+by+cz=0 \qquad (x,y,z)=(1\,0\,1)$$

con
$$a\cdot 1+b\cdot 0\cdot c\cdot 1=0$$

sono tutte le equazioni del tipo $\boxed{ax+by-az=0}$

I sistemi che ci interessano sono tutti quelli formati da un qualsiasi numero di equazioni prese dall'insieme

$$\underline{S}=\{ax+by-az=0 \mid a,b\in\mathbb{K}\}.$$

N.B: S é uno spazio vettoriale di dimensione $=2$

$$\begin{cases} x+y-2z=4+k \\ (k+2)x-3y+6z=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4+k \\ k+2 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

A $\qquad\qquad$ B

$$1 \leq rk(A) \leq 2$$

$$rk(A)=1 \iff \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k+2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$k+2+3=0 \quad k=-5$$

- $k \neq -5 \Rightarrow rk(A)=2=rk(A|B)$

$\Rightarrow$ sistema compatibile

$\infty^{3-2}=\infty^{1}$ soluzioni

$k = -5$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ -3 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{cc} A & B \end{array}$$

$rk(A) = 1 \quad rk(A|B) = 2$

$\Rightarrow$ il sistema non é compatibile.

—

$$A|B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & \qquad B \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{-2} & k & 0 & k+1 & k-2 \\ k+2 & -4 & k-2 & -6 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$$rk(A) = 1 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -2 & k \\ k+2 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

solo per $k = 2$ $\leftarrow$ $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ k+2 & k-2 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} -2 & k+1 \\ k+2 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

$k \neq 2 \Rightarrow rk(A) = 2 = rk(A|B) \Rightarrow$

$\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni

$k = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow rk(A) = 1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{\begin{matrix}-2\\4\end{matrix}} & \begin{matrix}2\\-4\end{matrix} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \begin{matrix}3\\-6\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}0\\0\end{matrix}} \end{array}\right)$$

$rk(A|B) = 1$

$\Rightarrow k = 2$ il sistema ammette

$\infty^{4-1} = \infty^3$ soluzioni.

Nella discussione dei sistemi riportare cosa succede per tutti i valori di k !!

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
K & 1 & 0 & K+1 \\
1-K & 0 & 2 & -1 \\
1 & 1 & K & 2
\end{array}\right)
$$

$A \qquad B$

la matrice A è quadrata.

$rk(A) \geq 2$

calcoliamo $\det A = 2 - (1-K)K - 2K =$

$= K^2 - 3K + 2 =$

$= (K-2)(K-1)$

$K \neq 2, +1 \Rightarrow rk(A) = rk(A|B) = 3$

il sistema ammette una ed una sola soluzione.

$K = 2$

$$
\begin{array}{c}
 C \\
\left(\begin{array}{ccc|c}
2 & 1 & 0 & 3 \\
-1 & 0 & 2 & -1 \\
1 & 1 & 2 & 2
\end{array}\right)
\end{array}
$$

$\det C = 4 + 2 - 6 =$
$= 0$

$rk(A) = rk(A|B) = 2$

∞^1 soluzioni.

$$
K=+1 \quad \begin{array}{c} \qquad\qquad C \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \end{array}
\qquad \det C = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4+1=5 \neq 0
$$

$rk(A)=2$, $rk(A|B)=3$

il sistema non è compatibile.

—

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

N.B in questo caso il sistema è omogeneo $\Rightarrow$ l'insieme delle soluzioni è un sottospazio vettoriale.

$rk(A)=rk(A|B)=2 \Rightarrow$

$S=\mathrm{Ker}\,A \qquad \dim S=2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 - x_4 \\ x_1 + 2x_2 = x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 2x_2 \\ (\cancel{x_3} - 2x_2) + x_2 = \cancel{x_3} - x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 2x_4 \\ x_2 = x_4 \end{cases}$$

$$S = \{ (x_3 - 2x_4, x_4, x_3, x_4) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ x_3 (1\ 0\ 1\ 0) + x_4 (-2, 1, 0, 1) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R} \}$$

$$= \mathcal{L}((1010), (-2,1,0,1)).$$

ed una base dell'insieme delle soluzioni è

$$\mathcal{B} = ((1\ 0\ 1\ 0), (-2\ 1\ 0\ 1))$$

MI RACCOMANDO: NELLA BASE NON CI DEVE ESSERE LA COMB. LINEARE, Sia $AX = B$ un sistema lineare.

In generale sia $\mathcal{S}$ l'insieme delle sue soluzioni.

Se $B = \underline{0} \Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ e dunque

$$\dim \mathcal{L}(\mathcal{S}) = n - rk(A) = \dim Ker(A).$$

Se $B \neq \underline{0} \Rightarrow \mathcal{S} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{S})$ e in generale

$$\dim \mathcal{L}(\mathcal{S}) = n - rk(A) + 1$$

$k = 2 \rightarrow \infty^2$ soluzioni

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 6 \end{array}\right) \\ \quad A \qquad\qquad B \end{array}$$

$$x+2y+z=2$$

$$x=2-2y-z$$

$$S=\{(2-2y-z,y,z)\mid y,z\in\mathbb{R}\}=$$

$$=\{(2\,0\,0)+y(-2,1,0)+z(-1\,0\,1)\mid y,z\in\mathbb{R}\}.$$

$$=(2\,0\,0)+\mathcal{L}(\underbrace{(-2\,1\,0),(-1\,0\,1)}_{Ker(A)})$$

$$\mathcal{L}(S)=\mathcal{L}(\underbrace{(2\,0\,0),(-2\,1\,0),(-1\,0\,1)}_{\text{Generatori}})$$

$\mathcal{B}=((2\,0\,0),(-2\,1\,0),(-1\,0\,1))$

é libera perché

$(2\,0\,0)\notin Ker(A)$ e

$((-2\,1\,0),(-1\,0\,1))$ libera.

$\dim \operatorname{Ker}(A) = 2$

$\dim \mathcal{L}(S) = 3$

N.B. $\mathcal{L}(S) = \mathbb{R}^3$ perché

$\mathcal{L}(S) \leq \mathbb{R}^3$ e $\dim \mathcal{L}(S) = 3$.

una base di $\mathcal{L}(S)$ è

anche $((1\,0\,0), (0\,1\,0), (0\,0\,1))$

Modo "più veloce":

$\dim \operatorname{Ker}(A) = 2$ & $B \neq \underline{0}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dim \mathcal{L}(S) = 3$; inoltre

$\mathcal{L}(S) \leq \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathcal{L}(S) = \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ BASE DI $\mathcal{L}(S)$ = BASE DI $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{B} = ((1\,0\,0), (0\,1\,0), (0\,0\,1))$

DIAGONALIZZAZIONE.

$A \in \mathbb{K}^{n,n}$. $\quad f_A : \begin{cases} \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ X \longrightarrow AX \end{cases}$

OSSERVIAMO CHE $f_A(X) = X$

$\iff f_A(X) - X = \underline{0}$

$\iff AX - X = \underline{0}$ cioè $\underbrace{(A-I)X = \underline{0}}$

$AX = X$

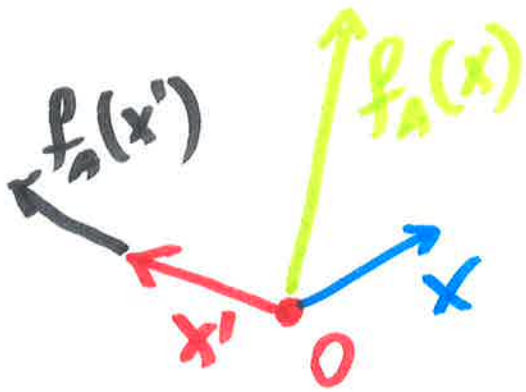
l'insieme dei vettori fissati da f_A è un sottospazio vettoriale.

$\downarrow$

soluzioni di $(A-I)X = \underline{0}$

più in generale ci chiediamo per quali vettori $X \in \mathbb{K}^n$ l'applicazione f_A fissa la "direzione" di X

cioè $\exists \lambda : f_A(X) = \lambda X$



<u>Def</u>: Si dice che un vettore $X \neq \underline{0}$ è un <u>autovettore</u> di <u>autovalore</u> $\underline{\lambda}$ per una applicazione lineare $f: V_n(\mathbb{K}) \to V_n(\mathbb{K})$ se

$$f(X) = \lambda X$$

In particolare se fissiamo una base $\mathcal{B}$ di $V_n(\mathbb{K})$ e consideriamo A matrice che rappresenta f rispetto a $\mathcal{B}$, X vettore colonna

X autovettore per $A \iff$

$\underline{X \neq \underline{0}}$ & $\underline{AX = \lambda X}$

Supponiamo $V_n(\mathbb{K})$ ammetta una base di autovettori $(\bar{v}_1 — \bar{v}_n)$ e che $\bar{v} = \alpha_1\bar{v}_1 + — + \alpha_n\bar{v}_n$

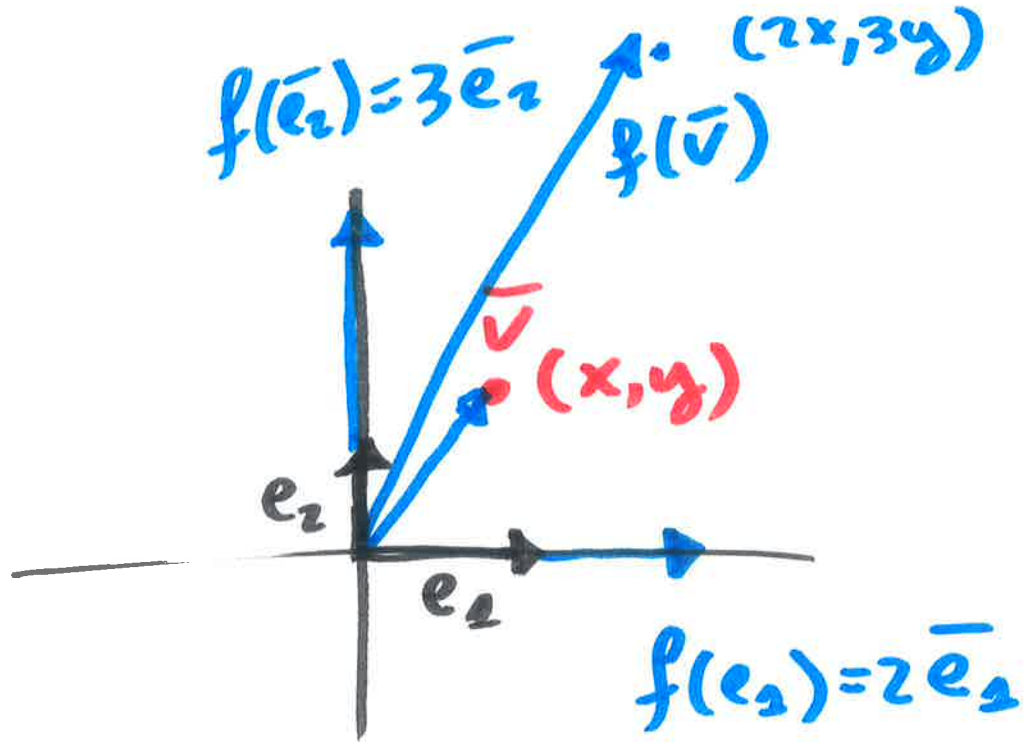
In particolare
$$f(\bar{v}_1) = \lambda_1\bar{v}_1$$
$$f(\bar{v}_2) = \lambda_2\bar{v}_2$$
$$\vdots$$
$$f(\bar{v}_n) = \lambda_n\bar{v}_n$$

autovalori autovettori

$$f(\bar{v}) = \sum \alpha_i f(\bar{v}_i) =$$
$$= \sum \alpha_i \lambda_i \bar{v}_i =$$
$$= \lambda_1\alpha_1\bar{v}_1 + \dots + \lambda_n\alpha_n\bar{v}_n$$

in particolare (BIS) la matrice che descrive $f(\bar{v})$ è diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

In $\mathbb{R}^2$



$$\bar{v} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$$

$$\Rightarrow f(\bar{v}) = 2x\bar{e}_1 + 3y\bar{e}_2$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Sarà interessante cercare quando uno spazio vettoriale ammette una base di autovettori

$\downarrow$

equiv. a chiedersi quando una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ è diagonalizzabile.