Sistemi Lineari

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

m equazioni in n incognite.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\boxed{AX = B}$$

DOMANDE:

1) Il sistema é risolubile?

2) Se sí, quali sono le soluzioni?

[3) Se no, non si puó fare nulla?].

1) risolubile significa $\exists S = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ con

$s_i \in \mathbb{K}$ tale che

$$AS = B$$

S é detta soluzione.

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

NON SONO RISOLUBILI

$$\begin{cases} x_1 + 0 \cdot x_2 = 1 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

é risolubile.

$$\begin{cases} x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 = 0 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -x_3 = -1 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

é risolubile con ∞ soluzioni.

A é detta matrice incompleta del sistema

B é detta matrice dei termini noti del sistema

$A|B$ = matrice in cui si giustappone la colonna B alle colonne di A → matrice completa del sistema.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \to rk = 1$$

$$A|B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to rk = 2$$

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 = 1 \\ 0x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to rk = 2$$

$$A|B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to rk = 2$$

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to rk = 2$$

$$A|B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to rk = 2$$

Teorema di Rouché-Capelli.

Sia $AX=B$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite.

$\Rightarrow$ $AX=B$ é compatibile (cioé ammette soluzione) se e solamente se $rk(A)=rk(A|B)$

—

DIM 1) $AX=B$ come scrittura formale.

$$f_A : \begin{cases} \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m \\ X \longrightarrow AX \end{cases}$$

f_A é una funzione lineare.

DIRE CHE $AX=B$ ha soluzione é la stessa cosa del dire che

$\exists X \in \mathbb{K}^n : f_A(X)=B$

cioé che B appartiene all'immagine di

f_A.

D'altro canto f_A é lineare

$\Rightarrow$ l'immagine di f_A é generata

da $f_A(\bar{e}_1), f_A(\bar{e}_2) — f_A(\bar{e}_n)$

ove $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ — $\bar{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

perché $(\bar{e}_1 — \bar{e}_n)$ base del dominio.

<u>Ma</u> $f_A(\bar{e}_i)$ é esattamente la i-esima colonna di A

[es.

$$\begin{array}{ccccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = c_3$$

$\uparrow \bar{e}_3$]

in particolare $Im\, f_A = \mathcal{L}(c_1 — c_n)$

ove $c_1 — c_n$ sono le colonne della matrice A (ovvero $c_i = A\bar{e}_i$)

$AX = B$ compatibile $\iff$

$$B \in \operatorname{Im} f_A \iff$$

$$\boxed{B \in \mathcal{L}(C_1 \ldots C_n)}$$

esprimiamo questa condizione in termini di ranghi.

$$B \in \mathcal{L}(C_1 \ldots C_n) \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}(C_1 \ldots C_n) = \mathcal{L}(C_1 \ldots C_n\, B)$$

$$\Rightarrow rk(A) = \dim \mathcal{L}(C_1 \ldots C_n) =$$

$$= \dim \mathcal{L}(C_1 \ldots C_n\, B) = rk(A|B)$$

viceversa.

$$rk(A) = rk(A|B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dim \mathcal{L}(C_1 \ldots C_n) = \dim \mathcal{L}(C_1 \ldots C_n\, B)$$

e chiaramente

$$\mathcal{L}(C_1 \ldots C_n\, B) \supseteq \mathcal{L}(C_1 \ldots C_n)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(C_1 \ldots C_n\, B) = \mathcal{L}(C_1 \ldots C_n) \Rightarrow$$

$$B \in \mathcal{L}(C_1 \ldots C_n).$$

$AX=B$ compatibile

$\iff$

$B \in \mathcal{L}(C_1 \_\_\_ C_n)$

$\iff$

$rk(A) = rk(A|B)$ $\square$

$A = (C_1 \_\_\_ C_n)$

$AX = x_1 C_1 + x_2 C_2 + \_\_\_ + x_n C_n = B.$

$B \in \mathcal{L}(C_1 \_\_\_ C_n)$

$\iff$

$rk(A) = rk(A|B)$ $\square$

OSS/Def:

Un sistema lineare $AX=B$ é detto di Cramer se $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ e $\det A \neq 0$.

Teorema: Un sistema di Cramer ammette una ed una sola soluzione.

DIM.: 1) Siano S, S' due soluzioni $\Rightarrow$

$$AS = B = AS'$$

ma A è matrice invertibile

$$\Rightarrow A^{-1}(AS) = A^{-1}B = A^{-1}(AS')$$

$$\Rightarrow S = A^{-1}B = S'.$$

D'altro canto $A^{-1}B$ è soluzione. $\square$

2) osserviamo che $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$.

poiché A invertibile, $\operatorname{Ker} f_A = \{\underline{0}\} \Rightarrow f_A$ è iniettiva (e quindi ogni vettore B ammette al più una preimmagine) ma visto che la dim. del dominio e del codominio coincidono f_A è anche suriettiva $\Rightarrow$ ogni vettore B ammette preimmagine $\square$

al più una!

$\exists$ soluzione

$$\operatorname{Ker} f_A = \{ \bar{v} \in \mathbb{K}^n \mid f_A(\bar{v}) = \underline{0} \}.$$

$$\ker A = \{ X \in \mathbb{K}^n \mid AX = \underline{0} \}.$$

Def: Due sistemi lineari (compat.)

$$AX = B \quad \text{e} \quad A'X = B'$$

sono detti equivalenti

se hanno le stesse soluzioni.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 3 \end{cases} \qquad (*)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 = 6 \\ 2x_1 + 3x_3 = 3 \\ \cancel{x_1}\ 4x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases} \qquad (*')$$

Teorema: Sia

$$AX = B$$

un sistema lineare.

allora il sistema lineare che si ottiene sostituendo ad una riga di A un suo multiplo $\neq 0$ o una comb. lineare della stessa con le rimanenti è equivalente al sistema di partenza.

→ eliminazione Gaussiana

DIM

$$\begin{cases} R_1 X = b_1 \\ R_2 X = b_2 \\ \vdots \\ R_m X = b_m \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix}$$

$$R_1 = (a_{11} \ \ldots \ a_{1n}) \qquad R_1 X = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n$$

Supponiamo S soluzione

$\Rightarrow R_1 S = b_1 \quad R_2 S = b_2 \;—\; R_m S = b_m$.

é soddisfatto

$\Rightarrow$ anche
$$\begin{matrix} \alpha(R_1 S) = \alpha b_1 \\ R_2 S = b_2 \\ | \\ R_m S = b_m \end{matrix}$$

é soddisfatto $\forall \alpha$

Similmente.

$$R_1 S + \sum_{i \neq 1} \underbrace{\beta_i (R_i S)} = b_1 + \sum \underbrace{\beta_i b_i}$$

é soddisfatta.

Quindi S é soluzione di

$$A' X = B' \quad \text{ove}$$

$$A' = \begin{pmatrix} \alpha R_1 + \sum \beta_i R_i \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix}$$

$$B' = \begin{pmatrix} \alpha b_1 + \sum \beta_i b_i \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

viceversa. Supponiamo

S' soluzione di $A'X = B'$

$$(\Delta) \begin{cases} (\alpha R_1 + \sum \beta_i R_i) S' = \alpha b_1 + \sum \beta_i b_i \\ R_2 S' = b_2 \\ \vdots \\ R_m S' = b_m \end{cases}$$

$\alpha \neq 0$

sottraiamo alla prima riga

$\beta_2 R_2 \quad \dots \quad \beta_m R_m$

$$(\Delta') \begin{cases} \alpha R_1 X = \alpha b_1 \\ R_2 X = b_2 \\ \vdots \\ R_m X = b_m \end{cases}$$

ogni sol. di Δ è anche sol. di Δ'.

ma $\alpha \neq 0 \Rightarrow$ dividiamo la I eq. per α ed otteniamo che ogni sol. di S' è sol. di

$$\begin{cases} R_1 X = b_1 \\ \vdots \\ R_m X = b_m \end{cases}$$

che è il sistema di partenza $\square$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 = 6 \\ 2x_1 + 3x_3 = 3 \\ 4x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 3 \\ 0 & -4 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3/4 & -\frac{3}{4} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 3/4 & -\frac{3}{4} \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 \quad + \frac{3}{2} x_3 = \frac{3}{2} \\ x_2 + \frac{3}{4} x_3 = -\frac{3}{4} \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x_3 \\ x_2 = -\frac{3}{4} - \frac{3}{4}x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

Ho risolto il sistema lineare.

→ ci sono ∞^1 soluzioni che dipendono dal parametro x_3 e sono tutte del tipo

$$\left\{ \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}x_3, -\frac{3}{4} - \frac{3}{4}x_3, x_3\right) \middle| x_3 \in \mathbb{K} \right\}$$

$$= \left\{ \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, 0\right) + x_3\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, 1\right) \right.$$

$$\left. x_3 \in \mathbb{K} \right\} =$$

$$= \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, 0\right) + \mathcal{L}\left(\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, 1\right)\right)$$

Lemma 1:

Sia $AX = B$ un sistema lineare. Allora l'insieme delle soluzioni di $AX = B$ é un sottospazio vett. di $\mathbb{K}^n$ $\iff$ $B = \underline{0}$ (cioé il sistema lineare é omogeneo).

<u>DIM</u>: Sia S insieme delle soluzioni di $AX = B$. Se $B \neq \underline{0}$

$\Rightarrow \underline{0} \notin S$ infatti $A\underline{0} = \underline{0}$

$\Rightarrow S$ non può essere sottospazio

se $B = \underline{0} \Rightarrow S = \operatorname{Ker} A = \{X : AX = \underline{0}\}$.

e $\operatorname{Ker} A \leq \mathbb{K}^n$ infatti se

$y, y' \in \operatorname{Ker} A \Rightarrow$

$$A(\alpha y + \beta y') = \alpha A y + \beta A y' = \alpha \cdot \underbrace{\underline{0}}_{=\underline{0}} + \beta \cdot \underline{0} \Rightarrow \alpha y + \beta y' \in \operatorname{Ker} A$$

$\square$

OSS: Ogni sistema lineare omogeneo ammette $\underline{0}$ come soluzione $\Rightarrow$ é compat. (in particolare $rk(A) = rk(A|\underline{0})$)

Teorema: Sia $AX = B$ un sistema lineare compatibile. $\Rightarrow$ ogni soluzione $\bar{X}$ di $AX = B$ si scrive come $\bar{X} = X_0 + Z$ ove X_0 é una soluzione particolare fissata del sistema e Z é una soluzione del sistema omogeneo associato

$$AZ = \underline{0}$$

DIM: Se $\bar{X} = X_0 + Z \Rightarrow A\bar{X} = AX_0 + AZ =$
$= B + \underline{0} = B$

viceversa se

$\bar{X}$ soluzione di $AX = B$

$\Rightarrow A\bar{X} - AX_0 = B - B = \underline{0}$

e quindi $\bar{X} - X_0 = Z$ è

soluzione di $AZ = \underline{0}$

$\Rightarrow \bar{X} = X_0 + Z$ $\square$

praticamente: le soluzioni di ogni sistema lineare hanno la forma

$$\bar{V} + W$$

vettore particolare di soluzione

sottospazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

$$\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, 0\right) + \mathcal{L}\left(\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, 1\right)\right)$$

NON BCA un caso.

Def: Si dice che un sistema lineare $AX=B$ ha ∞^t soluzioni se esso è compatibile e il sottospazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato ha $\dim = t$

↓

in altre parole le soluzioni del sistema dipendono da t parametri

Teorema: Sia $AX=B$ un sistema lineare compatibile $\Rightarrow$ esso ha ∞^{n-k} soluzioni ove n = numero di incognite

$k = rk(A) = rk(A|B)$

$\square$