Matrici invertibili, basi, dimensioni e ranghi

- $M \in \mathbb{K}^{n,n}$ é invertibile $\iff \det(M) \neq 0$
- $GL(n, \mathbb{K}) = \{M \in \mathbb{K}^{n,n} \mid \det(M) \neq 0\}$.

  é un gruppo non commutativo.

→ legame fra matrici invertibili e basi ($\longrightarrow$ una matrice $n \times n$ é invertibile $\iff$ le sue righe/colonne sono una base di $\mathbb{K}^n$).

Teorema: Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno sp. vett. di dim n sul campo $\mathbb{K}$

e siano $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 — \bar{e}_n)$
e $\mathcal{B}' = (\bar{e}_1' — \bar{e}_n')$

due sue basi.

$$(*) \begin{cases} \bar{e}_1' = a_{11}\bar{e}_1 + a_{12}\bar{e}_2 + \text{——} + a_{1n}\bar{e}_n \\ \bar{e}_2' = a_{21}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 + \text{——} + a_{2n}\bar{e}_n \\ \vdots \\ \bar{e}_n' = a_{n1}\bar{e}_1 + a_{n2}\bar{e}_2 + \text{——} + a_{nn}\bar{e}_n \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{pmatrix} \qquad E' = \begin{pmatrix} \bar{e}_1' \\ \vdots \\ \bar{e}_n' \end{pmatrix}$$

$$E' = A E$$

A é la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Sia $\bar{v} = (v_1'\bar{e}_1' + v_2'\bar{e}_2' + \cdots + v_n'\bar{e}_n')$ un vettore di $V_n(\mathbb{K})$.

$$\bar{v} = (v_1' \cdots v_n') E'$$

$$\bar{v} = (v_1' \cdots v_n') E' = (v_1' \cdots v_n') A E$$

$(v_1' \cdots v_n') A$ sono le componenti di $\bar{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$.

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = {}^tA \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix}$$

posto $\bar{v} = \sum v_i \bar{e}_i = \sum v'_i e'_i$

in quanto $\bar{v} = (v'_1 \,—\, v'_n) E' =$

$$= \boxed{(v'_1 \,—\, v'_n) A} \, E$$

↳ componenti di $\bar{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$

$= (v_1 \,—\, v_n)$.

<u>OSS</u>: le matrici di cambiamento di base sono invertibili. $\Rightarrow$ hanno $\det \neq 0$

A : cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

A' : cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

AA'

→ vettori di $\mathcal{B}'$ rispetto vettori di $\mathcal{B}'$.

↓ vettori di $\mathcal{B}$ rispetto vettori di $\mathcal{B}'$

↙ vettori di $\mathcal{B}'$ rispetto vettori di $\mathcal{B}$

AA' contiene le componenti dei vettori di $\mathcal{B}'$ rispetto a stessa $\Rightarrow AA' = I$

similmente $A'A = I$ $\square$

<u>oss</u>: In generale A contiene come righe le componenti dei vettori di $\mathcal{B}'$ rispetto a $\mathcal{B}$.

$$AE = E'$$

$$A'E' = E$$

$$\Rightarrow A'AE = A'E' = E \Rightarrow A'A = I$$

quando si cambiano le comp. dei vettori:

Si considera

$$ {}^tA X' = X \rightarrow \text{comp. rispetto a } \mathcal{B}. $$

$$ AE = E' $$

Se le righe/colonne di A sono l. indip $\Rightarrow \det(A) \neq 0$.

se $\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ le righe/colonne di A sono indip.

$((1\,3\,5\,0), (0\,0\,1\,0), (7\,8\,1\,1), (1\,0\,1\,0))$

base di $\mathbb{R}^4$?

$$ \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = $$

$$ = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -3 \neq 0 $$

<u>sì</u> è base.

Def: Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ una matrice
Si dice rango di A l'ordine del più grande minore quadrato di A con determinante non nullo.

$$rk\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{matrix}} & \begin{matrix} 7 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{matrix} \end{pmatrix} = 2$$

$$rk\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{matrix}} & \begin{matrix} 7 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 8 \end{matrix} & \begin{matrix} 8 & 6 & 6 & 2 \end{matrix} \end{pmatrix} = 2$$

Teorema di Kronecker
Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n} \Rightarrow rk(A)$ coincide con la dimensione dello spazio vettoriale generato dalle righe di A (sottospazio di $\mathbb{K}^n$) e con la dimensione del sott. vettoriale di $\mathbb{K}^m$ generato dalle colonne di A.

Lemma

Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno sp. vett. finitamente generato sul campo $\mathbb{K}$ e sia $\mathcal{B}=(\bar{e}_1 — \bar{e}_n)$ una sua base fissata.

Sia inoltre $\mathcal{V}=(\bar{v}_1 — \bar{v}_k)$ una sequenza di vettori di $V_n(\mathbb{K})$.

$k\leq n$.

Scriviamo gli elementi di $\mathcal{V}$ in componenti rispetto a $\mathcal{B}$.

$$\bar{v}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\bar{e}_j$$

in particolare $(a_{i1} — a_{in})$ sono le componenti di $\bar{v}_i$ rispetto a $\mathcal{B}$.

I vettori $\bar{v}_i$ sono linearmente indipendenti se e solamente se la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & — & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{k1} & — & a_{kn} \end{pmatrix}$

contiene un minore $K \times K$ con det $\neq 0$.

(In tal caso diciamo che A ha rango pieno = il max rango possibile).

---

1) Supponiamo V sia legato $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ almeno uno dei $\overline{v_i}$ é c. lineare dei rimanenti $\Rightarrow$ almeno una riga di A é comb. lineare delle rimanenti e tutti i minori quadrati che contengono tale riga hanno det $= 0$ $\Rightarrow$ $rk(A) < K$ $\rightarrow$ fine.

2) Supponiamo V libero $\Rightarrow |V| = K$
Se $|V| = n \Rightarrow$ i vettori di V sono una base $\Rightarrow$ det $A \neq 0 \Rightarrow$ A contiene un minore $n \times n$ con det $\neq 0$.

$|\mathcal{V}| = k < n$

→ possiamo usare il teorema di completamento della base ed agg. a $\mathcal{V}$ $(n-k)$ vettori di $\mathcal{B}$ di modo da avere una base di $V_n(\mathbb{K})$.

$$\big(\underbrace{\bar{v}_1\ \bar{v}_2 \ \text{—}\ \bar{v}_k}_{\mathcal{V}}\ \underbrace{\bar{e}_{i_1}\ \text{—}\ \bar{e}_{i_{n-k}}}_{\subseteq \mathcal{B}}\big) = \mathcal{V}'$$

Scriviamo A' = matrice che ha come righe le comp. di tutti i vettori di $\mathcal{V}'$!

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \text{———} & a_{1n} \\ | & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \text{———} & a_{kn} \\ 0\ 0 & 1\ 0\ 0 & \text{—} & 0\ 0 \\ \vdots & & & \\ 1\ 0\ 0 & \cdots & 0 \text{—} & 0 \\ 0\ 0\ 0 & \text{———} & 1 \text{—} & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right] A \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right] \text{righe che hanno esattamente una entrata } = 1 \neq 0. \end{array}$$

$\det A' \neq 0$

ma $\det A'$ lo possiamo calcolare sviluppando con Laplace a partire dall'ultima riga e risulta

$$\det A' = (-1)^{n+i_{n-k}} A'_{n,i_{n-k}}$$

cioè $\det A' = \pm \det A'_{n,i_{n-k}}$

$\downarrow$

minore $(n-1)\times(n-1)$ di A'

questo stesso ragionamento si applica a tutte le righe che corrispondono ai vettori di $\mathcal{B}$ aggiunti a $\mathcal{O}$ e dunque dopo $n-k$ passaggi $\det A' = \pm \det A''$ con A'' minore $k\times k$ di A

$\Rightarrow$ A contiene un minore $k \times k$ con det $\neq 0$ in quanto $\det A' \neq 0$. $\square$

In $\mathbb{R}^6$ $\quad \mathcal{V} = \big((1\,0\,1\,0\,0\,1), (0\,1\,1\,0\,0\,0), (1\,0\,1\,0\,0\,0)\big)$.

$$\det \begin{vmatrix} 1 & \boxed{0} & \boxed{1} & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{1} & \boxed{1} & 0 & 0 & \boxed{0} \\ 1 & \boxed{0} & \boxed{1} & 0 & 0 & \boxed{0} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \pm \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

$A \in \mathbb{K}^{m,n}$

<u>Teorema</u> $\mathcal{L}_C(A) \leq \mathbb{K}^m$ generato dalle colonne di A

$\mathcal{L}_R(A) \leq \mathbb{K}^n$ generato dalle righe di A

$$rk(A) = \dim \mathcal{L}_C(A) = \dim \mathcal{L}_R(A)$$

<u>DIM</u>:

Supponiamo $\overset{= k}{rk(A)} > \dim \mathcal{L}_R(A)$.

$\Rightarrow$ ~~abbiamo~~ sia M un minore $k \times k$ in A con $\det(M) \neq 0$.
Allora le k righe individuate da M (per il lemma) sono l. indip. $\Rightarrow$ dim dello spazio gen. da tutte le righe di A deve essere almeno k $\Rightarrow$ ↯.

Viceversa: se $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{L}_R(A) = h > rk(A) = k$

allora ci sono in A almeno h righe lin. indipendenti $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ c'è un minore $h \times h$ con $\det \neq 0$ (prendendo solo queste h

righe) $\Rightarrow K \geq h$ ✓

$\rightarrow$ in particolare $rk(A) = \dim \mathcal{L}_R(A)$.
poiché la def. di rango è simmetrica nelle righe/colonne di $A \rightarrow \underline{\dim \mathcal{L}_R(A)} = \underline{rk(A)} = \underline{\dim \mathcal{L}_C(A)}$ ▫

N.B: In generale

$$\mathcal{L}_R(A) \neq \mathcal{L}_C(A)$$

e $rk(A)$ è un numero intero!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

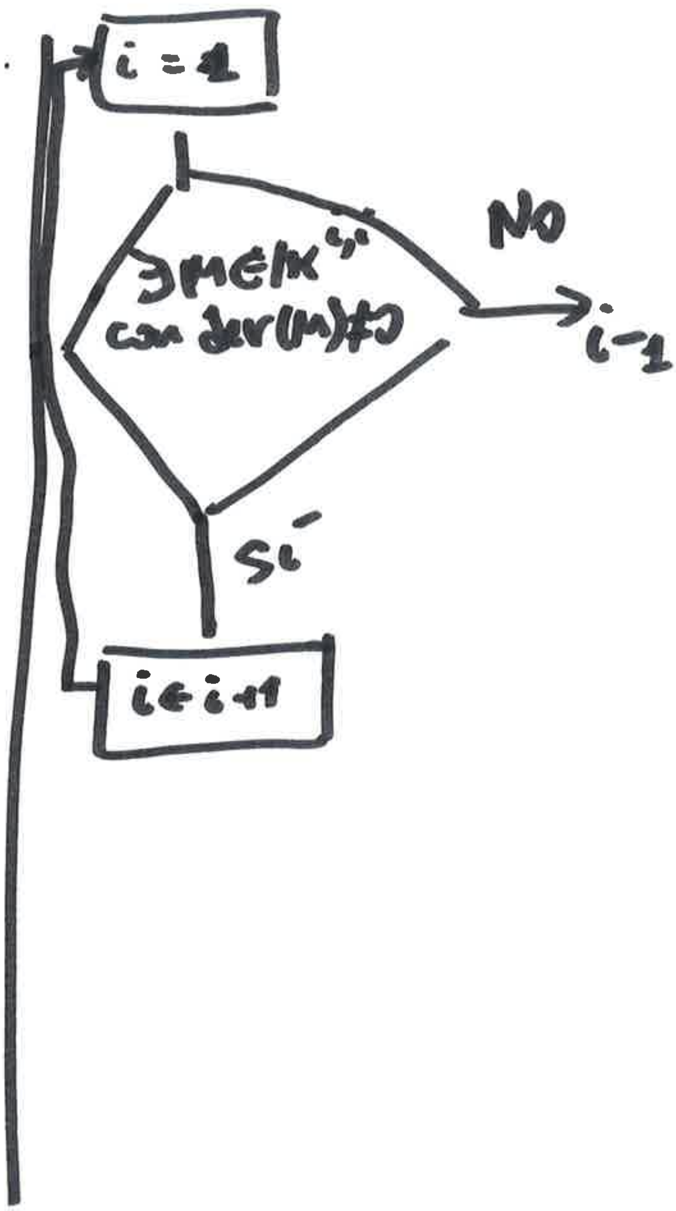
$$\mathcal{L}((1234), (0101)) \leq \mathbb{R}^4$$

$$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right) \leq \mathbb{R}^2$$

per calcolare $Rk(A)$ bisogna considerare a priori tutti i minori di A

→ OSSERVIAMO CHE SE $\forall$ minore di ORDINE $h \times h$ in A ha $\det = 0 \Rightarrow$ ANCHE TUTTI I MINORI DI ORDINE $(h+i) \times (h+i)$ hanno $\det = 0$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



→ Teorema degli orlati

Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n} \Rightarrow$ $rk(A) = h$ se e solamente se A contiene un minore $h \times h$ con $\det \neq 0$ ed ogni minore $(h+1) \times (h+1)$ che contiene detto minore ha $\det = 0$

$$A = \begin{pmatrix} k+1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & k \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & k & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$rk\ A = ?$

$$rk\ A = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} k+1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} k+1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & k \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\cancel{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & k \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0}$$

$$\begin{vmatrix} k+1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & k & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} k+1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & k \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\cancel{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & k \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0}$$

$k \neq 0 \Rightarrow rk(A) \geq 3$ $\quad -k \begin{vmatrix} k+1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$

$k \neq 0, -1 \Rightarrow rk(A) \geq 3$

$$k=0 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\Rightarrow rk(A)=4$$

$$k=-1 \rightarrow A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A =$$

Teorema degli orlati

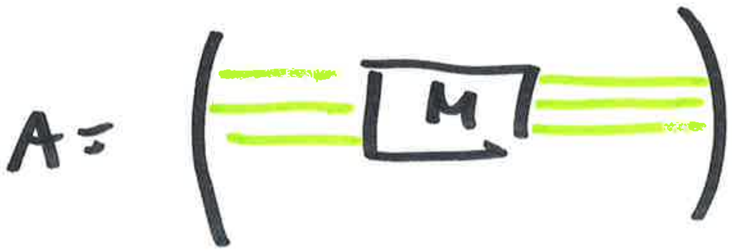
Sia A matrice M minore di A

$h \times h$ $\quad r_g = rk(A)$. $\quad \det(M) \neq 0$

→ Supponiamo che A abbia rango $r_g = h \Rightarrow$ ogni minore $(h+1)\times(h+1)$ di A ha $\det = 0$.

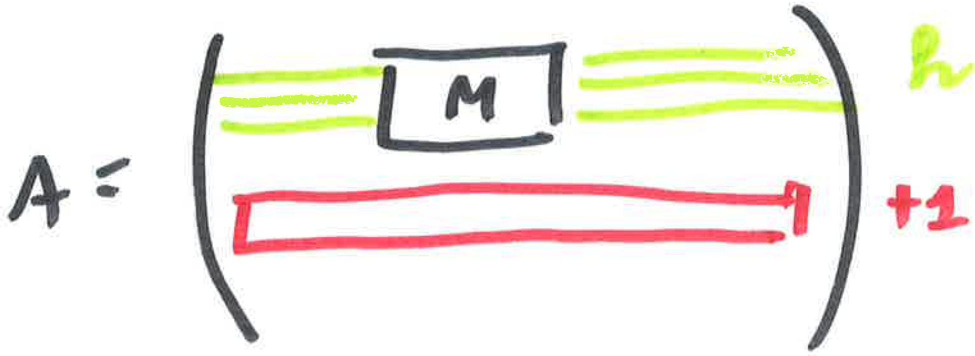
$\Rightarrow$ ogni orlato di M (= minore $(h+1)\times(h+1)$ che contiene M) ha $\det = 0$

Viceversa: supponiamo M minore con $\det(M) \neq 0$ e che ogni orlato di M abbia $\det = 0$.

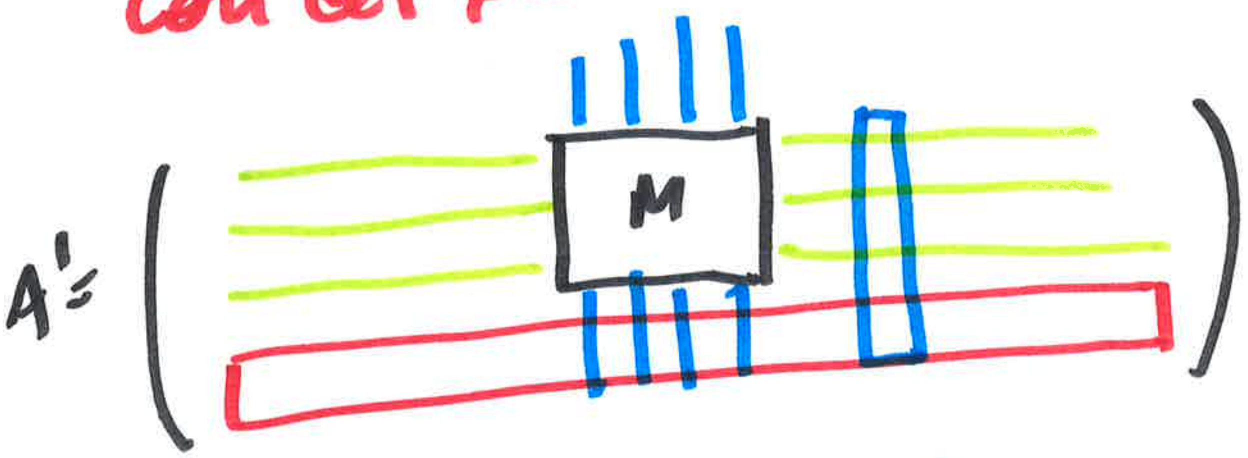


per il lemma le righe intercettate da M sono linearmente indipendenti.

se $rk(A) > h \Rightarrow$ esisterebbe una altra riga in A indip. rispetto le righe individuate da M.



sempre per il lemma questo insieme di $h+1$ righe contiene un minore $(h+1)\times(h+1)$ con $\det \neq 0$



ragioniamo ora per colonne.
le h colonne che contengono M in A' sono indip. lo spazio delle colonne di A' ha dim $h+1$ =

di un spazio delle righe

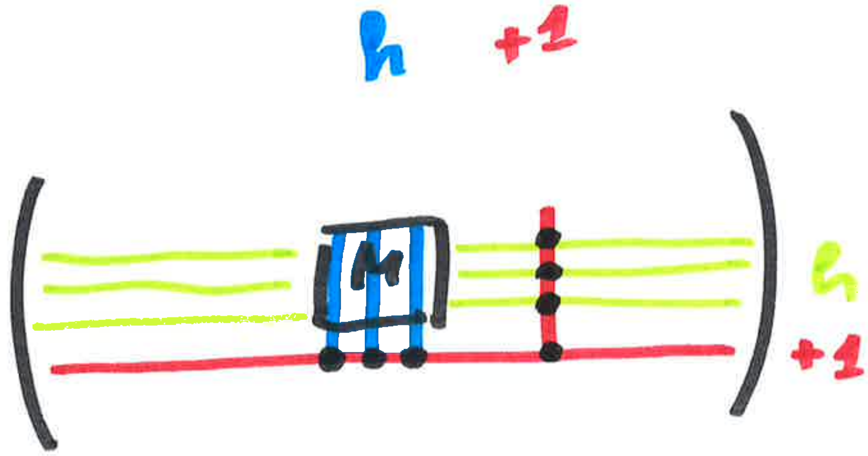
$\Rightarrow$ $\exists$ una colonna in A' che si può aggiungere alle colonne di M per avere una base dello spazio delle colonne.

$\Rightarrow$ abbiamo trovato un minore $(h+1)\times(h+1)$ che contiene M ed ha $\det \neq 0$ ↯

$\rightarrow$ NE SEGUE $rk(A) = h$.

$\square$

$A =$



OSS: In generale un modo per estrarre una seq. libera di vettori da una seq. data é calcolare il rango della matrice delle componenti degli stessi e prendere i vettori che corrispondono alle righe intercettate dal minore di ordine max che dà il rango stesso.

$$
\begin{array}{l}
\rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow
\end{array}
\begin{bmatrix}
1 & 2 & 0 & 1 & 3 & 6 & 0 \\
2 & 4 & 0 & 2 & 6 & 12 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 3 & 1 & 0 & 4 & 6 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

$$
\mathcal{B}_{\mathcal{L}_R}(A) = \big((0110100),(1310460),(0000001)\big).
$$

$$
\mathcal{B}_{\mathcal{L}_C}(A) = \left(\begin{pmatrix} 2\\4\\1\\3\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6\\12\\0\\6\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right)
$$

$$
= rk \begin{pmatrix}
1 & 2 & 0 & 1 & 3 & 6 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 3 & 1 & 0 & 4 & 6 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} = rk
$$

$$= rk\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -2 \\ k+2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ k+2 & -3 \end{vmatrix} = -3-2k-4$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ k+2 & 6 \end{vmatrix} = 6+2k+4$$

$$A|B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4+k \\ k+2 & -3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$k = -\frac{7}{2}$ & $k = 1 \Rightarrow rk(A) = 2 \quad \forall k$

$rk(A|B) = 2$

$$A = \begin{bmatrix} K & k-4 & 0 & k-4 \\ 2 & k-4 & 1 & k-4 \\ K & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} K & 0 & k-4 \\ 2 & 1 & k-4 \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & k-4 \\ k & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= k - k^2 + 4k =$$

$$= k(5-k)$$

$$\begin{vmatrix} k-4 & 0 & k-4 \\ k-4 & 1 & k-4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ k-4 & 1 & k-4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} k-4 & k-4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$K=0$ o $K=5$ $\quad rk(A)=2$

$K \neq 0,5$ $\quad rk(A)=3$

Sistema lineare di m equazioni in n incognite.

→ collezione di eq del tipo

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

ove $a_{ij} \in \mathbb{K}$ e x_i $(i = 1 \dots n)$ sono simboli.

$b_i \in \mathbb{K}$

Un vettore $s = (s_1\ s_2 \dots s_n) \in \mathbb{K}^n$ è detto soluzione di $(*)$ se sostituendo in $(*)$ ai termini x_i gli scalari s_i tutte le equazioni sono soddisfatte.

(*) si può riscrivere così.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\boxed{AX = B}$$

sistema di m equazioni scalari in n incognite ≡

≡ una equazione matriciale.

A = matrice incompleta del sistema

$$A|B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

matrice completa del sistema.

$AX = B$

~~Sia B una fissata base di $\mathbb{K}^n$~~

$$\Rightarrow \quad f_A : \begin{cases} \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m \\ (x_1 \dots x_n) \longrightarrow A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{cases}$$

è una funzione lineare da $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ (risp. le basi canoniche).

dire che $AX = B$ è risolubile significa $B \in \operatorname{Im}(f_A)$

$\Rightarrow$ significa che B è combinazione lineare delle colonne di A visto che le colonne di A generano $\operatorname{Im} f$.

$$\Rightarrow B \in \mathcal{L}(\underbrace{C_1 \text{ —— } C_n}_{\text{colonne di } A}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dim \mathcal{L}(C_1 \text{ — } C_n) =$$

$$= \dim \mathcal{L}(C_1 \text{ — } C_n \; B)$$

$$\Leftrightarrow rk(A) = rk(A|B)$$

$\square$