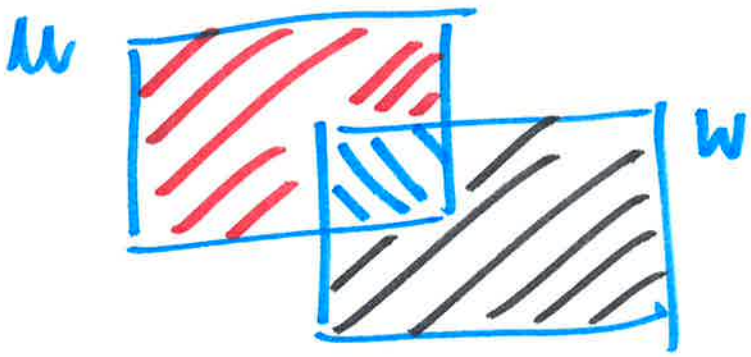
Formula di Grassmann.

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

$\rightarrow \dim U \cap W = 0 \Rightarrow U \cap W = \{\underline{0}\}$

$\Rightarrow \dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W.$

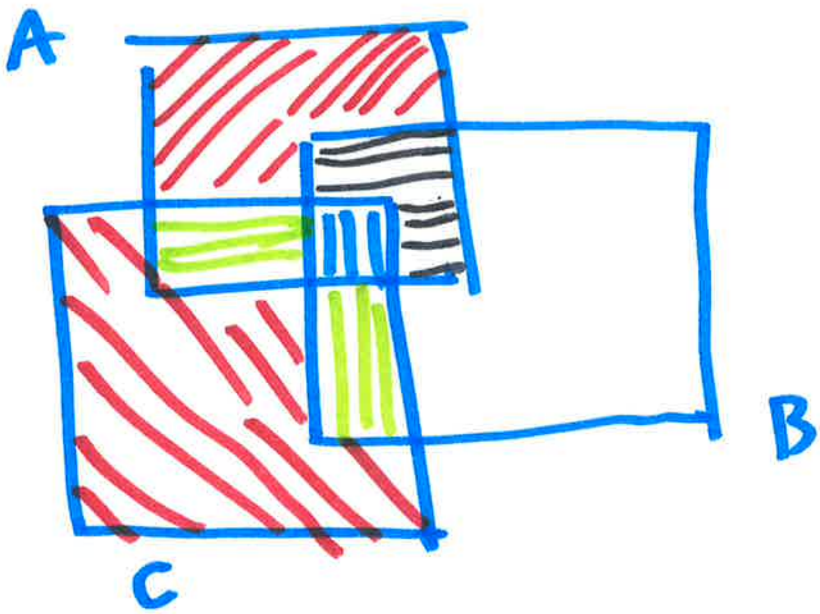
$$|U \cup W| = |U| + |W| - |U \cap W|$$



$$|U \cup W| = |U \setminus W| + |W \setminus U| + |U \cap W|$$

$$= |U| - |U \cap W| + |W| - |U \cap W| + |U \cap W|$$

$$= |U| + |W| - |U \cap W|$$



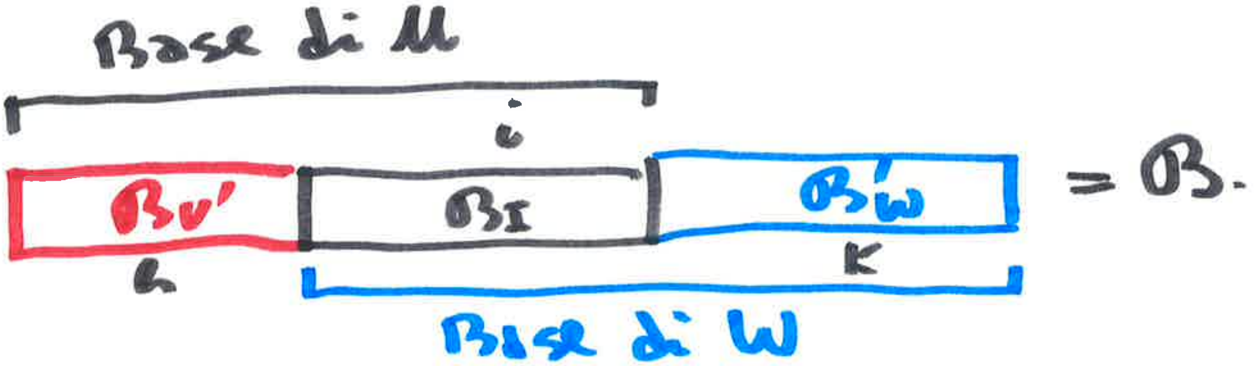
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

$$I = U \cap W$$

$\dim I = 0 \Rightarrow$ fine.

$\dim I > 0 \Rightarrow \exists\ \mathcal{B}_I = (\bar{e}_1 — \bar{e}_i)$ base di I



$\mathcal{B}_I \subseteq U$, $\mathcal{B}_I \subseteq W$ di vettori liberi

$\mathcal{B}_U = \mathcal{B}_I \cup \mathcal{B}_{U'}$ Base di U

e $\mathcal{B}'_{U'} = \{\bar{u}_1 — \bar{u}_h\}$ con $h+i = \dim U$

$\mathcal{B}_W = \mathcal{B}_I \cup \mathcal{B}_{W'}$ Base di W

con $\mathcal{B}'_{W'} = \{\bar{w}_1 — \bar{w}_K\}$ e $K+i = \dim W$

$$|\mathcal{B}| = h + K + i = (\dim U - i) + (\dim W - i) + i =$$

$$= \dim U + \dim W - \dim U \cap W$$

Bisogna dimostrare che $\mathcal{B}$ é base di $\mathcal{U}+W$. $\Rightarrow |\mathcal{B}| = \dim(\mathcal{U}+W)$

- $\mathcal{B}$ seq. di generatori ✓
- $\mathcal{B}$ libera

OSSERVIAMO CHE $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}+W$
(in realtà $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U} \cup W$)
$\Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{U}+W$

ma $\forall$ vettore di $\mathcal{U}$ é c. lineare di vettori di $\mathcal{B}$ ed anche $\forall$ vettore di W. In particolare ogni vettore somma di un vettore di $\mathcal{U}$ ed un vettore di W é c. lineare di vettori di $\mathcal{B}$. $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ genera $\mathcal{U}+W$.

[ABBIAMO FATTO VEDERE CHE L'UNIONE DI UN SISTEMA DI GENERATORI DI $\mathcal{U}$ con un SISTEMA DI GENERATORI DI W É UN SISTEMA DI GENERATORI DI $\mathcal{U}+W$]

$\mathcal{B}$ é libera.

$$(\underbrace{\overline{u}_1 \ldots \overline{u}_h \; \overbrace{\overline{e}_1 \ldots \overline{e}_i}^{\mathcal{B}_I}}_{\mathcal{B}_U} \; \overline{w}_1 \ldots w_k) = \mathcal{B}$$

$\mathcal{B}_W = (\overline{e}_1 \ldots \overline{e}_i \; \overline{w}_1 \ldots w_k)$

Supponiamo per assurdo $\mathcal{B}$ legata.

$\exists (\alpha_1 \ldots \alpha_h \; \beta_1 \ldots \beta_i \; \gamma_1 \ldots \gamma_k) \neq \underline{0}$

tali che

$$\alpha_1 \overline{u}_1 + \ldots + \alpha_h \overline{u}_h + \beta_1 \overline{e}_1 + \ldots + \beta_i \overline{e}_i + \gamma_1 \overline{w}_1 + \ldots + \gamma_k \overline{w}_k = \underline{0}$$

OSS: NON PUÒ essere $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_h = 0$ (almeno uno degli $\alpha_j \neq 0$)

perché altrimenti avremmo una c. lineare non banale di $\mathcal{B}_W$ che dà $\underline{0}$ ma $\mathcal{B}_W$ é una base.

$$\overline{u} := \alpha_1 \overline{u}_1 + \ldots + \alpha_h \overline{u}_h \neq \underline{0}$$

$$\underset{\in U}{\overline{u}} = \underset{\in \mathcal{L}(\mathcal{B}_W) = W}{-(\beta_1 \overline{e}_1 + \ldots + \beta_i \overline{e}_i + \gamma_1 \overline{w}_1 + \ldots + \gamma_k \overline{w}_k)}$$

$\Rightarrow \bar{u} \in \mathcal{U} \cap W = I = \mathcal{L}(\mathcal{B}_I)$

$\Rightarrow \exists\, \delta_1 \dots \delta_i$ tali che

$$\bar{u} = \delta_1 \bar{e}_1 + \_\_\_ + \delta_i \bar{e}_i =$$

$$= \alpha_1 \bar{u}_1 + \_\_\_ + \alpha_h \bar{u}_h$$

$\Rightarrow$ contraddizione perché $\bar{u}$ si scrive in 2 modi differenti rispetto $\mathcal{B}_U$.

$(\alpha_1 \_\_\_ \alpha_h\ 0\ 0 \_\_\_ 0)$

$(0\ 0 \_\_\_ 0\ \delta_1 \delta_2 \_\_\_ \delta_i)$

con almeno un $\alpha_j \neq 0$ e un $\delta_j \neq 0$.

$\Downarrow$ che $\mathcal{B}$ sia legata $\Rightarrow \mathcal{B}$ libera

$\Rightarrow \mathcal{B}$ base di $\mathcal{U} + W$ $\square$

<u>Esercizio</u>: Siano $\mathcal{U}, W \leq \mathbb{R}^{3,5}$ con $\dim \mathcal{U} = 8$, $\dim W = 9$ calcolare i valori minimi e massimi di $\dim(\mathcal{U} \cap W)$ e $\dim(\mathcal{U} + W)$.

$$\underbrace{\max(8,9)}_{=9} \leq \dim(U+W) \leq \max(8+9, 15) = 15$$

$$2 \leq \dim(U \cap W) \leq \min(8,9) = 8$$

$$\dim(U\cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U+W)$$
$$= 8+9-\dim(U+W) \geq$$
$$8+9-15 = 2$$

Esercizio: Trovare se esistono ~~due~~ sottospazi U, W di $\mathbb{R}^5$ con $\dim U = 3$ $\dim W = 4$ ed $U \oplus W$.

NON $\exists$ in quanto $3+4=7>5$ e quindi $\dim(U\cap W) \geq 2$.

... con $\dim U = 2$ e $\dim W = 3$

Prendiamo $(\bar{e}_1 — \bar{e}_5)$ base canonica di $\mathbb{R}^5$ $U = \mathcal{L}(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ $W = \mathcal{L}(\bar{e}_3 \bar{e}_4 \bar{e}_5)$

Trovare 2 sottospazi di $\mathbb{R}^6$ con

$\dim U = 3$ $\dim W = 4$ e tale

$\dim(U \cap W) = 2$

$$(\underbrace{\bar{e}_1 \, \overbrace{\bar{e}_2 \, \bar{e}_3}}\overbrace{\, \bar{e}_4 \, \bar{e}_5} \, \bar{e}_6)$$

$U = \mathcal{L}(\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3)$ $W = \mathcal{L}(\bar{e}_2 \bar{e}_3 \bar{e}_4 \bar{e}_5)$

$$W = \mathcal{L}(\bar{e}_4 + \bar{e}_6 - \bar{e}_1, \; \bar{e}_5 - \bar{e}_2, \; \bar{e}_1 + \bar{e}_2 \; \bar{e}_1 - \bar{e}_3).$$

OSS/Esercizio. $\mathbb{R}^5$

$U = \mathcal{L}((10100), (01100))$

$W = \mathcal{L}((11200), (00100), (01111))$

$U + W = \mathcal{L}((10100), (01100), \cancel{(11200)}, (00100), (01111))$

N.B $\mathcal{U} \cap W \neq \mathcal{L}(\emptyset)$

$$\mathcal{U} \cap W = \mathcal{L}((11200))$$

$$\dim(\mathcal{U} \cap W) = 3+2-4 = 1$$

$$\alpha(10100)+\beta(01100) =$$
$$= \ell(11200)+m(00100)+n(01111)$$

$n=0$

$$\alpha(10100)+\beta(01100) = \ell((11200)+ m(00100))$$

$$\begin{cases} \alpha = \ell \\ \beta = \ell \\ \alpha+\beta = 2\ell+m \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} \alpha=\beta=\ell \\ m=0 \end{array}$$

Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ é detta invertibile $\Leftrightarrow \exists\, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ tale che $AB = BA = I_n$

ove $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

Teorema: Una matrice A é invertibile $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

($\Leftrightarrow$ le righe/colonne di A sono una base di $\mathbb{K}^n$).

II Teorema di Laplace.

$A \in \mathbb{K}^{n,n}$, $\quad \Gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$

$\forall\ 1 \leq i, k \leq n$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Gamma_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq i \\ \det A & \text{se } k = i \end{cases}$$

DIM: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Gamma_{kj}$ se $i \neq k$ é il det. di una matrice in cui la riga i compare 2 volte $\Rightarrow 0$ $\square$ "

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow i=1 \\ \\ \\ \leftarrow k=4 \end{array}$$

$\det A = |A|$

$$\sum_{j=1}^{4} a_{1j}\Gamma_{4j} = \boxed{1}\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 1 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+\boxed{2}\cdot(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+\boxed{7}(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 9 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+\boxed{3}(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 1 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Teorema di Binét.

Se $A, B \in \mathbb{K}^{n,n} \Rightarrow$

$$\det(A \cdot B) = (\det A)(\det B)$$

N.B ~~$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$ in generale~~

$\rightarrow$ Una matrice è invertibile $\Leftrightarrow$

$A \in \mathbb{K}^n \quad \det(A) \neq 0.$

Se A invertibile $\Rightarrow \exists B$:

$$AB = I$$

ma per Binét

$$\det(AB) = \det I = 1$$

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) \Rightarrow \det A \neq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

poniamo $A^{agg} := \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \cdots & \Gamma_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \Gamma_{n1} & \cdots & & \Gamma_{nn} \end{pmatrix}$

$$M = {}^t A^{agg} \cdot A = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \cdots & \Gamma_{n1} \\ \Gamma_{12} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \\ \Gamma_{1n} & \cdots & \Gamma_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

i-esima riga

j-esima colonna

$$m_{ij} = \begin{pmatrix} \Gamma_{1i} & \Gamma_{2i} & \cdots & \Gamma_{ni} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_k \Gamma_{ki} \cdot a_{kj} = \begin{cases} \det A & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$\Rightarrow M = (\det A)\, I_n \Rightarrow$ se $\det A \neq 0$ possiamo porre

$$A^{-1} = (\det A)^{-1}\, {}^{t}A^{agg}$$

e $A^{-1}A = I_n$ similmente

$AA^{-1} = I_n$ $\square$

N.B: di inversa di A ce ne è solo una se $\det(A) \neq 0$.

$BA = AB = I$ e $AC = I$

$\Rightarrow AB = AC$.

moltiplico a sx per $B \Rightarrow$

a $(BA)B = (BA)C$

$$\Downarrow$$

$$IB = IC$$

$$\Downarrow$$

$$B = C.$$

perché $BA = I$

$\square$

Calcolare l'inversa come abbiamo fatto richiede di calcolare n^2 determinanti.

$\rightarrow A \in \mathbb{K}^{n,n} \rightarrow \exists\ n^2$ complementi algebrici da calcolare.

Si può fare di meglio?
Sí con l'algoritmo di Gauss.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

scambio

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

divido.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sottraggo $\frac{1}{2} R_2$ a R_1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$O(n)$