$\mathbb{K}^{m,n}$ = insieme di tutte le tabelle con m righe e n colonne ad entrate in $\mathbb{K}$.
$\rightarrow$ MATRICI

$$\mathbb{K}^{m,n} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \middle| a_{ij} \in \mathbb{K} \right\}.$$

$(\mathbb{K}^{m,n}, +)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

di dimensione $m \cdot n$

[Può definire un prodotto fra matrici di dimensioni compatibili]

$A \in \mathbb{K}^{m,n}$ $\quad B \in \mathbb{K}^{n,k}$

$\Rightarrow$ Definiremo $C \in \mathbb{K}^{m,k}$

in modo da scrivere $C = AB$

Applicazione lineare

$$f : V(\mathbb{K}) \longrightarrow W(\mathbb{K})$$

posto $\dim V = n$

$\dim W = m$

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ BASE DI V

$\mathcal{B}' = (\bar{e}_1' \dots \bar{e}_m')$ BASE DI W.

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{e}_i\right) = \sum_i \alpha_i f(\bar{e}_i) =$$

IL VALORE DI $f(\bar{v})$ DIPENDE SOLO DAI VALORI DI $f(\bar{e}_i)$ per $\bar{e}_i \in \mathcal{B}$ E DALLE COMPONENTI DI UN VETTORE $\bar{v}$ RISPETTO A $\mathcal{B}$.

$$= \sum \alpha_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \bar{e}_j'$$

scrivendo in comp. rispetto $\mathcal{B}'$

ove $f(e_i) := \sum a_{ji} \bar{e}_j'$

LA FUNZIONE f é univocamente determinata dai valori $a_{ji} \in \mathbb{K}$

Si dice matrice associata ad f rispetto le BASI $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ la matrice

$$A_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}'} = A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Vogliamo ora definire un prodotto righe per colonne fra insiemi di matrici.

$$f : \begin{cases} V(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \\ \bar{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{e}_i \longrightarrow \sum \alpha_i \sum_i a_{1i} \bar{e}_1' \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} := \sum a_{1i} \alpha_i$$

$(\alpha_1 \dots \alpha_n) \to$ componenti di V rispetto a $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$.

$$f(\sum \alpha_i \bar{e}_i) = \sum \alpha_i f(\bar{e}_i) = \sum \alpha_i a_{1i} \bar{e}_1'$$

le componenti del vettore $f(\bar{v})$ sono $\sum_i \alpha_i a_{1i}$

$$(1\ 2\ 3\ 5)\begin{pmatrix}7\\3\\1\\2\end{pmatrix} = 1\cdot 7+2\cdot 3+3\cdot 1+5\cdot 2$$

Supponiamo ora di avere una matrice ~~$A=(c_1\, c_2 \dots c)$~~

$$A=\begin{pmatrix}R_1\\R_2\\\vdots\\R_m\end{pmatrix} \qquad B=(C_1 \dots C_K)$$

m righe ognuna di n elementi

k colonne di n elementi.

$\Rightarrow$ AB é la matrice che ha m e K colonne ove la sua entrata $X_{ij} = R_i * C_j$

prodotto righe per colonne.

$\mathbb{K}^{3,3}$ $\mathbb{K}^{3,2}$ $\mathbb{K}^{2,2}$ 5

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = (1\ 2\ 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 19$$

$$a_{12} = (1\ 2\ 3)\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 14$$

$$a_{21} = (0\ 7\ 5)\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 + 7 \cdot 6 + 5 \cdot 2 = 52$$

$$a_{22} = (0\ 7\ 5)\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 5 \cdot 1 = 33$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1\ 2\ 3} \\ 0\ 7\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\6\\2\end{matrix}} & \begin{matrix}3\\4\\1\end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 14 \\ 52 & 33 \end{pmatrix}$$

proprietà del prodotto righe per colonne fra matrici

1) È Definito solo fra matrici del tipo $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, $B \in \mathbb{K}^{n,k}$ e fornisce una matrice $C = A \cdot B \in \mathbb{K}^{m,k}$.

Le dimensioni di A e B devono essere compatibili!

2) Supposto che A, B e C abbiano dimensioni compatibili:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

vale la prop. associativa (a patto che si possa fare il prodotto).

3) Se $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, $B, C \in \mathbb{K}^{n,t} \Rightarrow$

$$A(B+C) = AB + AC$$

4) Se $A, B \in \mathbb{K}^{m,n}$, $C \in \mathbb{K}^{n,t} \Rightarrow (A+B)C = AC + BC$

5) $\alpha \in \mathbb{K}$, $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, $B \in \mathbb{K}^{n,t}$ $\Rightarrow$

$$(\alpha A)B = \alpha(A \cdot B)$$

6) Data $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ definiamo la matrice trasposta di A come la matrice ~~[illegible]~~ in $\mathbb{K}^{n,m}$ che si ottiene da A scambiando le righe con le colonne.
e la indichiamo con ${}^{t}A$

Es. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2,3}$ $\quad {}^{t}A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{3,2}$

Vale che se $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, $B \in \mathbb{K}^{n,t}$

$${}^{t}(AB) = {}^{t}B\,{}^{t}A$$

$AB \in \mathbb{K}^{m,t}$, ${}^{t}B\,{}^{t}A \in \mathbb{K}^{t,m}$

7) <u>N.B</u> $\quad A \cdot B \neq B \cdot A$ in generale.

Il prodotto di matrici non é commutativo!!

Es. $A, B \in \mathbb{R}^{2,2}$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Sia $f : V_n(\mathbb{K}) \longrightarrow V_m(\mathbb{K})$

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1 \_\_ \bar{e}_n) \qquad \mathcal{B}' = (\bar{e}_1' \_\_ \bar{e}_m')$.

$$A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \cancel{[a_{11} \dots a_{1n}]} \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \dots & \\ \vdots & \end{pmatrix} \left[\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \alpha_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} =$$

= vettore che rappresenta rispetto a $\mathcal{B}'$ l'immagine del vettore $\bar{v} = \sum \alpha_i \bar{e}_i$

<u>CONSEGUENZA.</u>

Siano $V_n(\mathbb{K}) \xrightarrow{f} V_m(\mathbb{K}) \xrightarrow{g} V_t(\mathbb{K})$

$$(g \circ f) : V_n(\mathbb{K}) \longrightarrow V_t(\mathbb{K})$$

Siano A la matrice $\in \mathbb{K}^{m,n}$ che rappresenta f e B la matrice $\mathbb{K}^{t,m}$ che rappresenta g

$\Rightarrow \underset{\in \mathbb{K}^{t,n}}{BA}$ rappresenta $(g \circ f)$

N.B: Il prodotto di matrici non é una operazione su di un singolo insieme in generale.

$$\mathbb{K}^{m,n} \times \mathbb{K}^{n,t} \to \mathbb{K}^{m,t}$$

Se le matrici sono quadrate (= stesso numero di righe e colonne) allora il prodotto é possibile vederlo come operazione

$$\mathbb{K}^{n,n} \times \mathbb{K}^{n,n} \to \mathbb{K}^{n,n}$$

In $\mathbb{K}^{n,n}$ di che proprietà gode?

A) la proprietà associativa.

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

B) $\exists$ elemento neutro, la matrice

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+0\cdot a_{12} & 0a_{11}+a_{12} \\ a_{21}+0a_{22} & 0a_{21}+a_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+0\cdot a_{21} & a_{12}+0\cdot a_{22} \\ 0a_{11}+a_{21} & 0.a_{12}+a_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

In generale $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é l'el. neutro del prodotto in $\mathbb{K}^{n,n}$.

In generale se $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ si dice che A é invertibile se $\exists\, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ tale che $AB = I_n$

NON TUTTE LE MATRICI SONO INVERTIBILI.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

NON É INVERTIBILE.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ 2(x+z) & 2(y+t) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

AVREI $\quad (y+t) = 0 = 2(x+z)$ $\lightning$
$\quad (x+z) = 1 = 2(y+t)$

NON É INVERTIBILE!

Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ é invertibile $\Leftrightarrow$ le sue righe (colonne) sono un sistema libero di vettori.

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2z \nearrow 1 & y+2t \nearrow 0 \\ 2x+z \searrow 0 & 2y+t \to 1 \end{pmatrix}$$

$$x+2z=1=2y+t$$
$$y+2t=0=2x+z$$

$$y=-2t \qquad 2y+t=-4t+t=3t=1$$
$$z=-2x$$
$$x+2z=x-4x=-3x=1$$

$$x=-\frac{1}{3} \qquad y=\frac{2}{3}$$
$$z=\frac{2}{3} \qquad t=-\frac{1}{3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}+\frac{4}{3} & \frac{2}{3}-\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3}+\frac{2}{3} & \frac{4}{3}-\frac{1}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\exists$ una funzione $\det : \mathbb{K}^{n,n} \longrightarrow \mathbb{K}$ tale che $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ é invertibile $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

Definiamo in modo ricorsivo il det di una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$.

- $n=1 \Rightarrow A \in \mathbb{K}^{1,n}$ è $A = (a_{11})$
  $\Rightarrow \det(A) = a_{11}$

- Dato una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ chiamiamo minore A_{ij} la matrice ottenuta cancellando da A la i-esima riga e la j esima colonna.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si dice complemento algebrico Γ_{ij} della matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ con $1 \leq i, j \leq n$

$$\Gamma_{ij} := (-1)^{i+j} \det(A_{ij}).$$

e pongo $\forall i$ tale che $1 \le i \le n$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Gamma_{ij} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Gamma_{ij}$$

$$A \in \mathbb{K}^{1,1} \Rightarrow A = (a_{11}) \Rightarrow \det A = a_{11}$$

$$A \in \mathbb{K}^{2,2} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

fisso $i = 1$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{2} a_{1j} \Gamma_{1j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{2} a_{1j} (-1)^{1+j} \det(A_{1j})$$

$$= a_{11}(-1)^2 a_{22} + a_{12}(-1)^3 a_{21} =$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \underline{a_{11} a_{22}} - \underline{a_{12} a_{21}}$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}\det(A_{11}) + -a_{12}\det(A_{12}) + a_{13}\det(A_{13}) =$$

SARRUS

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 1 - 0$$
$$= -1$$

N.B

1) Il determinante non dipende dalla riga i da cui si parte (Teorema di Laplace)

2) In generale con la formula data si devono calcolare circa $n!$ determinanti per trovare $\det A$ con $A \in \mathbb{K}^{n,n}$

7x7 matrice

↓ 6 determinanti di 6x6

↓ per ognuno 5 det. di 5x5

⋮

totale 7! determinanti