Base → seq. libera di generatori

$V(\mathbb{K})$ $\quad \mathcal{B} = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$

$$\Rightarrow \boxed{\forall \bar{v} \in V(\mathbb{K})\ \exists!\ (\alpha_1 \dots \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \text{ tali che } \bar{v} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n}$$

$\bar{v}$

→ "A meno di isomorfismo" uno spazio vettoriale finitamente generato su un campo $\mathbb{K}$ è univocamente determinato dalla sua dimensione n.

$\mathbb{K}[x]_3 = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{K} \}$

$\mathcal{B} = (1, x, x^2)$

↓

rispetto a $\mathcal{B}$ le componenti del vettore $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ sono (a_0, a_1, a_2)

$$\mathcal{B} = (\overset{\bar{v}_1}{1+x}, \overset{\bar{v}_2}{1-x}, \overset{\bar{v}_3}{x+x^2})$$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$\alpha \bar{v}_1 + \beta \bar{v}_2 + \gamma \bar{v}_3 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$(\alpha + \alpha x) + (\beta - \beta x) + \gamma (x + x^2) =$$

$$\downarrow$$

$$(\alpha+\beta) + (\alpha - \beta + \gamma) x + \gamma x^2 =$$

$$a_0 + \quad a_1 x \quad + a_2 x^2$$

$$\begin{cases} \gamma = a_2 \\ \alpha - \beta + \gamma = a_1 \\ \alpha + \beta \quad = a_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma = a_2 \\ 2\alpha = a_1 + a_0 - \gamma = a_1 + a_0 - a_2 \\ \\ \beta = a_0 - \alpha \end{cases}$$

$$\left(\frac{a_1 - a_2 + a_0}{2}, \frac{a_0 - a_1 + a_2}{2}, a_2 \right)$$

$\square$

<u>OSS</u>: •) Se ad una sequenza libera si tolgono vettori $\Rightarrow$ si ottiene ancora una seq. libera.

$\Downarrow$

Ogni sottosequenza di una sequenza libera é libera.

••) Se ad una seq. legata si aggiungono vettori $\Rightarrow$ si ottiene una sequenza legata.

$\Downarrow$

Ogni soprasequenza di una sequenza legata é legata.

<u>DIM</u>: 1) Sia $(\bar{v}_1 \text{---} \bar{v}_n)$ una sequenza libera e supponiamo $(\bar{v}_1 \text{---} \bar{v}_{n-1}) \subseteq (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ legata

$\Rightarrow \exists (\alpha_1 \text{---} \alpha_{n-1}) \neq (0\,0 \text{---} 0)$ tali che $\alpha_1\bar{v}_1 + \text{---} + \alpha_{n-1}\bar{v}_{n-1} = \underline{0}$

$\Rightarrow \alpha_1 \bar{v}_1 + \text{——} + \alpha_{n-1} \bar{v}_{n-1} + 0 \bar{v}_n = \underline{0}$

e i coeff. $(\alpha_1 \text{——} \alpha_{n-1}, 0)$

non sono tutti nulli ↯ ASSURDO

perché $(\bar{v}_1 \text{——} \bar{v}_n)$ libera.

2) Sia $S = (\bar{v}_1 \text{——} \bar{v}_n)$ legata.

Se esistesse una soprasequenza

S' con $S \subseteq S'$ libera $\Rightarrow$

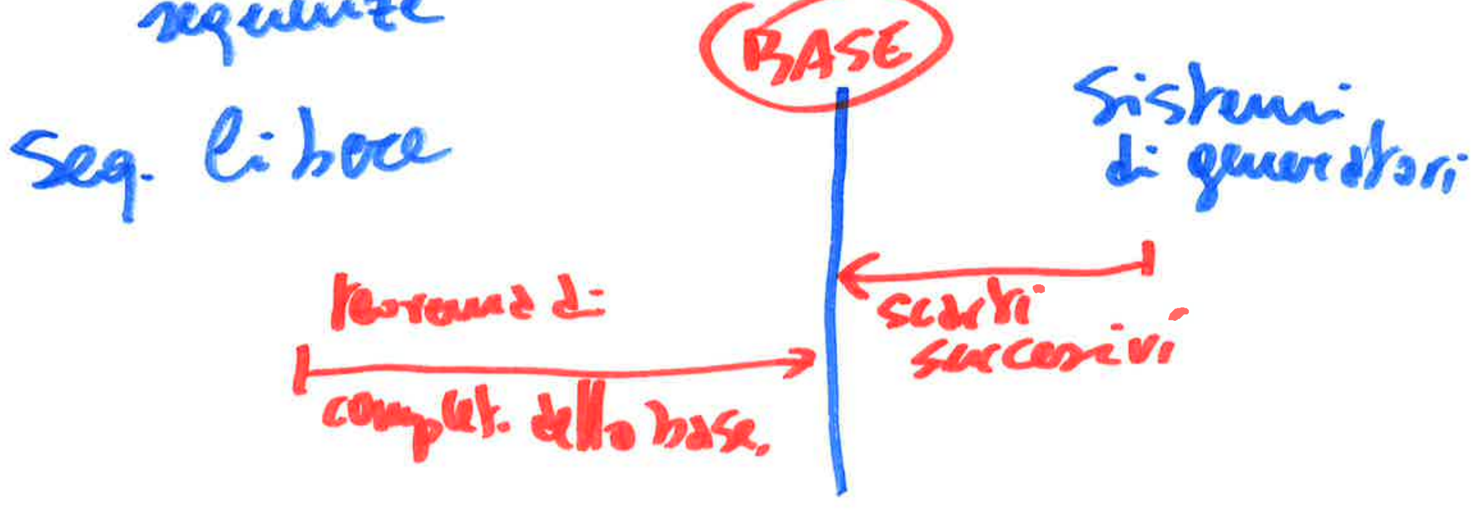
$\Rightarrow S'$ sarebbe una seq. libera

con una sottosequenza (S)

legata ↯ ASSURDO per quanto

appena visto $\square$

Legame fra sequenze libere e sistemi/sequenze di generatori di $V(\mathbb{K})$



Teorema (Lemma di Steinitz).

Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale finitamente generato e siano

$A = (\bar{a}_1\ \bar{a}_2 — \bar{a}_m)$ LIBERA

$B = (\bar{b}_1\ \bar{b}_2 — \bar{b}_n)$ GENERATORI

rispettivamente una sequenza libera di vettori di $V(\mathbb{K})$ ed una sequenza di generatori di $V(\mathbb{K})$. $\Rightarrow$ $\boxed{m \leq n}$

Una sequenza libera ha al più tanti vettori quanti una sequenza di generatori.

DIM per assurdo. Neghiamo la $T\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!$ e supponiamo $m > n$

$A = (\bar{a}_1 \ \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n \dots \bar{a}_m)$ $\quad m > n$

$B^0 = (\bar{b}_1 \dots \dots \bar{b}_n)$

B^0 seq. di generatori $\Rightarrow \bar{a}_1 \in \mathcal{L}(B^0)$

$\Rightarrow \exists \ \alpha_{01} \dots \alpha_{0n} \in \mathbb{K}$ tali che

$$\bar{a}_1 = \alpha_{01}\bar{b}_1 + \alpha_{02}\bar{b}_2 + \dots + \alpha_{0n}\bar{b}_n$$

A è libera $\Rightarrow \bar{a}_1 \neq \underline{0} \Rightarrow \exists i:$

$\alpha_{0i} \neq 0$ supponiamo

sia $i = 1$ cioè $\alpha_{01} \neq 0$

$\Rightarrow$ posso scrivere

$$\alpha_{01}\bar{b}_1 = \bar{a}_1 - \alpha_{02}\bar{b}_2 - \dots - \alpha_{0n}\bar{b}_n$$

$$\bar{b}_1 = \alpha_{01}^{-1}(\bar{a}_1 - \alpha_{02}\bar{b}_2 - \dots - \alpha_{0n}\bar{b}_n)$$

$\Rightarrow \bar{b}_1 \in \mathcal{L}(\bar{a}_1 \ \bar{b}_2 \dots \bar{b}_n)$

$$B^1 = (\bar{a}_1\ \bar{b}_2 \cdots \bar{b}_n)$$

osservo che $\mathcal{L}(B^1) = \mathcal{L}(B^0)$

perché ogni vettore che è nella c. lineare di B^0 si può scrivere come

$$\bar{v} = \beta_1 \bar{b}_1 + \beta_2 \bar{b}_2 + \dots + \beta_n \bar{b}_n$$

$\bar{b}_1$ lo sostituisco con

$$\alpha_{01}^{-1}(\bar{a}_1 - \alpha_{02}\bar{b}_2 - \dots - \alpha_{0n}\bar{b}_n)$$

e vedo che $\bar{v} \in \mathcal{L}(B^1)$

$$\mathcal{L}(B^0) \subseteq \mathcal{L}(B^1)$$

Il viceversa è analogo con

$$\bar{a}_1 = \alpha_{01}\bar{b}_1 + \_\_\_ + \alpha_{0n}\bar{b}_n$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(B^1) \subseteq \mathcal{L}(B^0).$$

$A = (\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n \dots \bar{a}_m)$

$B^1 = (\bar{a}_1\ \bar{b}_2 \dots \bar{b}_n)$ Generatori

$\bar{a}_2 \in \mathcal{L}(B^1)$

$\Rightarrow \bar{a}_2 = \gamma_{11}\bar{a}_1 + \alpha_{12}\bar{b}_2 + \dots + \alpha_{1n}\bar{b}_n$

<u>OSS</u> che non può essere

$(\alpha_{12}\ \alpha_{13} \dots \alpha_{1n}) = (0\ 0 \dots 0)$

perché altrimenti $\bar{a}_2 = \gamma_{11}\bar{a}_1$

implicherebbe A legata.

Supponiamo $\alpha_{12} \neq 0 \Rightarrow$

$\bar{b}_2 = \alpha_{12}^{-1}(\bar{a}_2 - \gamma_{11}\bar{a}_1 - \dots - \alpha_{1n}\bar{b}_n)$

$\Rightarrow B^2 = (\bar{a}_1\ \bar{a}_2\ \bar{b}_3 \dots \bar{b}_n)$

otteniamo $\mathcal{L}(B^2) = \mathcal{L}(B^1) = \mathcal{L}(B^0)$

$\Rightarrow B^2$ è seq. di generatori.

DOPO n passaggi abbiamo

$$\left.\begin{aligned} B^0 &= (\bar{b}_1\, \bar{b}_2 \dots \bar{b}_{n-1}\, \bar{b}_n) \\ B^1 &= (\bar{a}_1\, \bar{b}_2 \dots \bar{b}_{n-1}\, \bar{b}_n) \\ B^2 &= (\bar{a}_1\, \bar{a}_2 \dots \bar{b}_{n-1}\, \bar{b}_n) \\ &\vdots \\ B^{n-1} &= (\bar{a}_1\, \bar{a}_2 \dots \bar{a}_{n-1}\, \bar{b}_n) \\ B^n &= (\bar{a}_1\, \bar{a}_2 \dots \bar{a}_{n-1}\, \bar{a}_n) \end{aligned}\right] \text{Tutte seq. di generatori}$$

$$A = (\bar{a}_1\, \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n\, \bar{a}_{n+1} \dots \bar{a}_m)$$

libera.

OSSERVIAMO CHE $\bar{a}_{n+1} \in \mathcal{L}(B^n) =$

$= \mathcal{L}(\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n)$ con $a_1 \dots a_n \in A$

$\Rightarrow$ $\bar{a}_{n+1}$ é combinazione lineare di altri vettori di A $\Rightarrow$ ↯ ASSURDO perché A é libera $\rightarrow$

DEDUCIAMO CHE $m > n$ é falso $\Rightarrow$

$m \leq n$

$\square$

Conseguenze

Sia $V(\mathbb{K})$ uno s. vettoriale su $\mathbb{K}$ finitamente generato ALLORA:

1) Se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono 2 basi di $V(\mathbb{K}) \Rightarrow |\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$.

Si dice dimensione di $V(\mathbb{K})$ $\dim(V(\mathbb{K}))$ la cardinalità di una sua qualsiasi base $\mathcal{B}$. oppure 0 se $V(\mathbb{K})$ non ha base ($V(\mathbb{K}) = \{\underline{0}\}$).

2) Sia $\dim V(\mathbb{K}) = n \Rightarrow$ OGNI SEQUENZA CON $m>n$ vettori é legata e NESSUNA SEQ con $m<n$ vettori é di generatori.

3) In $V(\mathbb{K})$ con $\dim V(\mathbb{K}) = n$ (scriverò anche $V_n(\mathbb{K})$)

→ OGNI SEQUENZA DI n GENERATORI È LIBERA ⇒ BASE

→ OGNI SEQUENZA LIBERA DI n VETTORI È DI GENERATORI ⇒ BASE.

APPL. In $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{L}\big(\underbrace{(111)\ (010)\ (110)}\big)$$

~~(100)~~

$(001) \in \mathcal{L}(S)$

$(010) \in \mathcal{L}(S)$

$(100) \in \mathcal{L}(S)$

Seq. di generatori di $\mathbb{R}^3$ ⇒ BASE perché sono 3.

$$\alpha(111) + \beta(010) + \gamma(110) = (000)$$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$ LIBERA

1) $\mathcal{B}$ sequenza ~~sistema~~ libera di generatori

$\mathcal{B}'$ seq. libera di generatori

$|\mathcal{B}| = m$ $|\mathcal{B}'| = n$

$\mathcal{B}$ libera, $\mathcal{B}'$ di generatori

$\Rightarrow m \leq n$

$\mathcal{B}$ di generatori, $\mathcal{B}'$ libera $\Rightarrow$

$\Rightarrow n \leq m$

$\Rightarrow n = m$

2) Sia $V_n(\mathbb{K})$ di dim. n.
e sia T una sequenza di m vettori in $V_n(\mathbb{K})$.

Se $m > n \Rightarrow \exists$ una sequenza con meno di m vettori di generatori $\Rightarrow$ per Steinitz. T legata.

Se $m < n \Rightarrow \exists$ una seq. libera con più di m vettori $\Rightarrow T$ non di gen.

In $V_n(\mathbb{K})$

Sia $\mathcal{G}$ una sequenza di n generatori $\Rightarrow$ se $\mathcal{G}$ legata con gli scarti successivi troviamo $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$ di generatori e $|\mathcal{G}'| \leq n-1$

$\Rightarrow$ esisterebbe una seq. di $n-1$ generatori ed una seq di n vettori liberi $\lightning$ per STEINITZ.

$\Rightarrow$ OGNI SEQ. DI n GENERATORI É LIBERA.

Sia $\mathcal{H}$ una sequenza libera di n vettori $\Rightarrow$ se H non di generatori $\exists\, \bar{v} \in V_n(\mathbb{K})$ che non é c. lineare dei vettori di H

$\Rightarrow$ NESSUN VETTORE DI $H \cup \{\bar{v}\}$ É C. LINEARE DEI RIMANENTI

$\Rightarrow$ $H \cup \{\bar{v}\}$ É LIBERA ED HA $n+1$ ELEMENTI MENTRE C'É UNA SEQ.

DI n GENERATORI $\Rightarrow$ lg $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ H deve essere di generatori.

ESERCIZI

In $\mathbb{R}^{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a\, b\, c\, d \in \mathbb{R} \right\}$.

1) Si trovi una base.
2) Si trovi una seq. libera di 5 vettori
3) Si trovi una seq. legata di 5 vettori
4) Si trovi una seq. di 5 generatori
5) Si trovi una seq. di 3 generatori
6) Si trovi una seq. libera di 3 vettori.

1) $\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

$\mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

$\mathcal{B}_3 = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

RISPETTO $\mathcal{B}_2$ la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ha componenti $(a\ b\ c\ d)$

RISPETTO $\mathcal{B}_3$ essa ha componenti $(b\ a\ c\ d)$

2) NON ESISTE: $\dim \mathbb{R}^{2,2} = 4 < 5$

3) SEQ LEGATA DI 5 vettori:

$\left(\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right)$

$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$

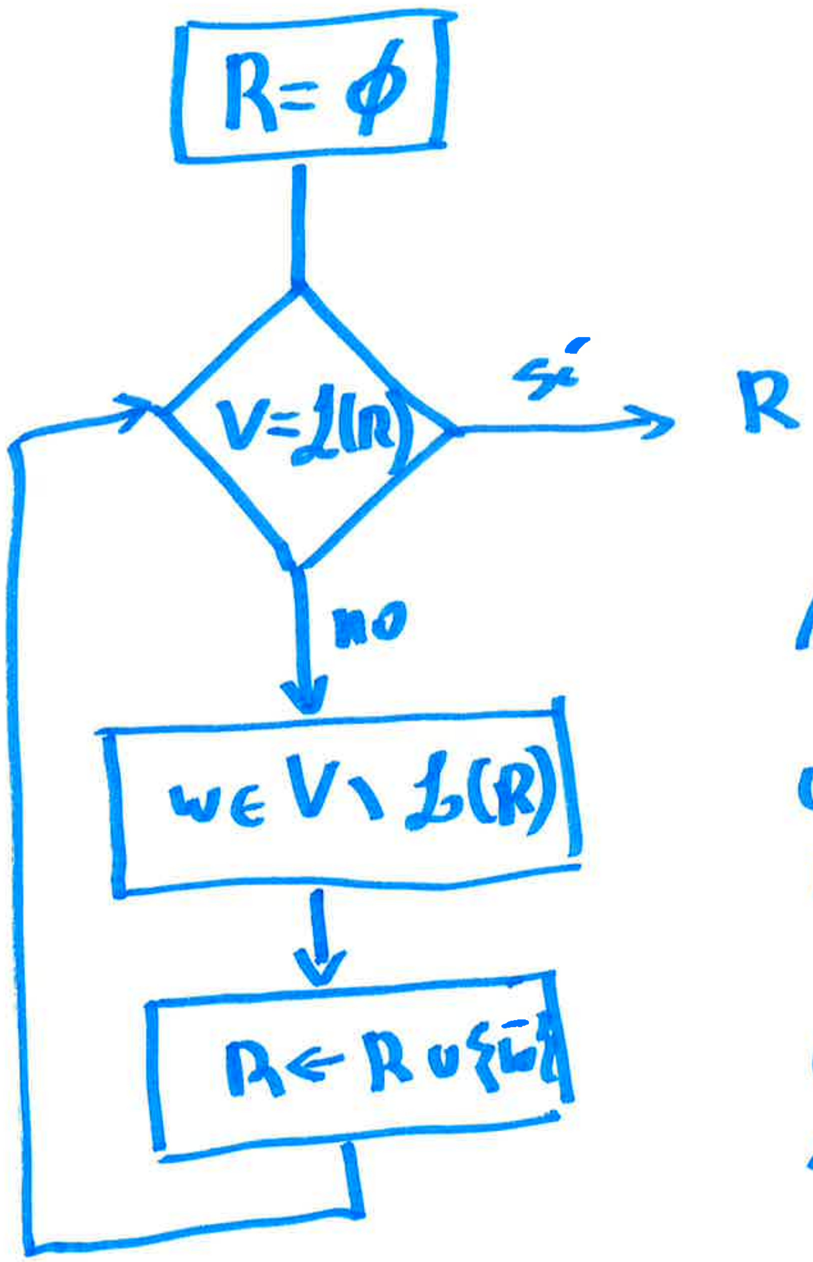
4) $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$

5) NON ESISTE $\dim \mathbb{R}^{2,2} = 4 > 3$
per Steinitz.

6) Seq. libera di 3 vettori:
TOGLIETE UN VETTORE DA UNA BASE.

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \cancel{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \right)$$

N.B. si può anche costruire in modo ricorsivo in questo modo.



ALLA FINE OTTENETE UNA SEQ. LIBERA DI GENERATORI PER $V(\mathbb{K})$ OPPURE $R=\emptyset$ SE $V(\mathbb{K})=\{0\}$.

per costruire delle basi a partire da $\emptyset$ oppure una seq. libera si puó usare la procedura di cui sopra o (piú facile) il cosiddetto teorema di completamento della base.

Teorema di completamento della base

Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale non banale finitamente generato e sia $\mathcal{B}$ una sua base.

Data A sequenza libera di vettori di $V_n(\mathbb{K})$ (o anche $A = \phi$).

$\exists\ \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ tale che $A \cup \mathcal{B}'$ é base di $V_n(\mathbb{K})$.

In particolare $|\mathcal{B}'| = n - |A|$.

Esempio in $\mathbb{R}^5$

$$\mathcal{B} = (\boxed{(10000)}, (01000), (00100), (00010), (00001))$$

$$A = (\underline{(57320)}, \underline{(11010)})$$

$$\mathcal{B}' = ((57320), \boxed{(01000)}, (00100), (00010), (00001))$$

$$\mathcal{B}^2 = (\overbrace{(57320), (11010)}^{A}, (00100),$$
$$(00010), (00001))$$

$\mathcal{B}' =$ vettori da aggiungere ad A per ottenere una base $=$

$$= \mathcal{B}^2 \setminus A = ((00100), (00010), (00001)).$$

$\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = (\overset{\bar{e}_1}{(100)}, \underline{\overset{\bar{e}_2}{(010)}}, \overset{\bar{e}_3}{(001)})$$

$$A = (\underline{(021)}).$$

$$(021) = 0 \cdot \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 1\bar{e}_3$$

$$\mathcal{B}^1 = ((100), (021), (001))$$

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B}^1 \setminus A = ((100), (001)).$$

Se siamo in $\mathbb{K}^n$ e consideriamo $\mathcal{B}$ base fissata e $\bar{v} \in \mathbb{K}^n$

abbiamo che $\bar{v}$ é una
n-upla di elementi di $\mathbb{K}$
ma anche le componenti di $\bar{v}$
rispetto a $\mathcal{B}$ sono una
n-upla di elementi di $\mathbb{K}$.

→ A PRIORI SONO 2 n-uple diverse
→ l'unica prop. che hanno in comune é $\bar{v} = (0\ 0 — 0)$
⇔ le sue componenti rispetto a $\mathcal{B}$ sono $(0\ 0 — 0)$.

<u>Es.</u> in $\mathbb{R}^3$ si trovi una base tale che il vettore $(7\ 5\ 3)$ abbia componenti $(3\ 0\ 1)$ rispetto ad essa.

$$\mathcal{B} = (\underset{\bar{b}_1}{(0\ 0\ 1)}, \underset{\bar{b}_2}{(0\ 1\ 0)}, \underset{\bar{b}_3}{(7\ 5\ 0)})$$

$$(7\ 5\ 3) = 3\bar{b}_1 + 0 \cdot \bar{b}_2 + 1\bar{b}_3$$

una base $\mathcal{B}$ rispetto cui il vettore $(7\sqrt{2}\ 5\ 9)$ ha componenti $(0\ 1\ 0)$.

$$((1\ 0\ 0\ ),(7\sqrt{2}\ 5\ 9),(0\ 1\ 0))$$

In $\mathbb{K}^n$ si dice base canonica la base $\mathcal{B}=(\underbrace{(1\ 0\ 0 \_ 0)}_{\bar{e}_1},\underbrace{(0\ 1\ 0\ 0 \_ \ 0)}_{\bar{e}_2},\dots \underbrace{(0\ 0 \_ \ 0\ 1)}_{\bar{e}_n})$

rispetto cui le componenti di ogni vettore coincidono con le sue entrate.

$$\bar{v}=(7\ \ 3\ \ 5\ \ 1\ \ 9)=7\bar{e}_1+3\bar{e}_2+5\bar{e}_3+1\bar{e}_4+9\bar{e}_5$$

vettore delle componenti rispetto a $\mathcal{B}$ è $(7\ 3\ 5\ 1\ 9)$

$$\mathbb{K}^{m,n} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix} \middle| \, a_{ij} \in \mathbb{K} \right\}$$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right).$$

$$\mathbb{R}^{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\left[\mathcal{B} = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\bar{e}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\bar{e}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\bar{e}_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\bar{e}_4} \right) \right]$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot \bar{e}_1 + b\bar{e}_2 + c\bar{e}_3 + d\bar{e}_4$$

$$\downarrow$$

componenti $(a \; b \; c \; d)$

$$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \quad (a c b d)$$

$$\mathcal{B}'' = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \quad (b a d c)$$

Applicazione lineare.

↓

MATRICE → TABELLE CHE RAPPRESENTANO APP. LINEARI.

Sia $\mathbb{K}$ un campo $V(\mathbb{K})$, $W(\mathbb{K})$ spazi vettoriali su $\mathbb{K}$.

$$f: V(\mathbb{K}) \longrightarrow W(\mathbb{K}).$$

f é detta lineare se $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall \bar{v}, \bar{w} \in V(\mathbb{K})$

$$\boxed{f(\alpha \bar{v} + \beta \bar{w}) = \alpha f(\bar{v}) + \beta f(\bar{w})}$$

f lineare se manda comb. lineari in comb. lineari.

In generale $Im(f) \leq W(\mathbb{K})$ sottospazio vettoriale di W

Siano $\bar{x}, \bar{y} \in Im(f) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \bar{a}, \bar{b} \in V : f(\bar{a}) = \bar{x}$

$f(\bar{b}) = \bar{y}$

consideriamo $\alpha \bar{x} + \beta \bar{y} =$

$= \alpha f(\bar{a}) + \beta f(\bar{b}) =$

$= f(\alpha \bar{a} + \beta \bar{b}) \in \mathrm{Im}\, f$ $\square$

Quando f è iniettiva?

$\mathrm{Ker}(f) = \{ \bar{v} \in V : f(\bar{v}) = \underline{0} \}.$

$\downarrow$

Kernel = Nucleo

<u>OSS</u> $\mathrm{Ker}(f) \leq V(\mathbb{K})$

$\bar{v}, \bar{w} \in \mathrm{Ker}(f)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$f(\alpha \bar{v} + \beta \bar{w}) = \alpha f(\bar{v}) + \beta f(\bar{w}) =$

$= \alpha \underline{0} + \beta \underline{0} = \underline{0}$

$\Rightarrow \alpha \bar{v} + \beta \bar{w} \in \mathrm{Ker}(f).$ $\square$

f iniettiva $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{\underline{0}\}$.

$\Leftrightarrow$ f manda sequenze libere di vettori di V in seq. libera.

DIM: Se f iniettiva $\Rightarrow$ il vettore $\underline{0} \in W$ ha un'unica preimmagine e questa è $\underline{0} \in V$ $\Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{\underline{0}\}$.

Se $\operatorname{Ker} f = \{\underline{0}\}$. supponiamo $\exists \underset{\bar{v} \neq \bar{w}}{\bar{v}, \bar{w}} \in V(\mathbb{K})$ con $f(\bar{v}) = f(\bar{w})$ e $\bar{v} \neq \bar{w} \Rightarrow f(\bar{v}) - f(\bar{w}) = \underline{0}$

e $f(\bar{v} - \bar{w}) = \underline{0} \Rightarrow \bar{v} - \bar{w} \in \operatorname{Ker}(f) = \{\underline{0}\} \Rightarrow \bar{v} = \bar{w}$ $\lightning$

$\square$

Def: $f: V \to W$ è detta isomorfismo se f è lineare e biiettiva.

<u>Teorema</u>: Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\mathbb{K}$ e $\mathcal{B}$ una sua base.

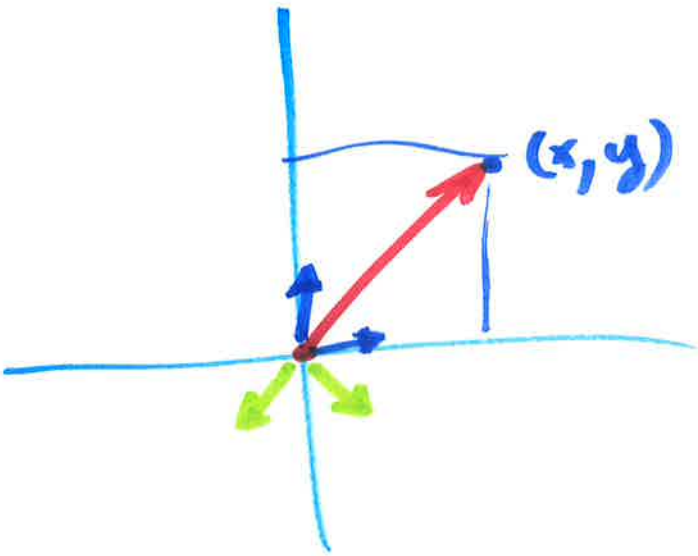
La funzione $\psi_{/\mathcal{B}} : V_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^n$

e che associa ad ogni vettore $\bar{v} \in V_n(\mathbb{K})$ le sue componenti rispetto a $\mathcal{B} = (\bar{e}_1 — \bar{e}_n)$.

$$\psi_{/\mathcal{B}}(\alpha_1\bar{e}_1 + — + \alpha_n\bar{e}_n) = (\alpha_1\, \alpha_2 — \alpha_n)$$

é un isomorfismo.

→ IN TERMINI MENO FORMALI
"possiamo lavorare in $\mathbb{K}^n$ per ogni s. vettoriale $V_n(\mathbb{K})$".



$\mathbb{R}^2$

$(x, y) +$
(x', y')
$\downarrow$
$(x+x' \; y+y')$