1) Def di Spazio vettoriale

$V(\mathbb{K})$ è spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ se.

1) $(V, \oplus)$ è un gruppo abeliano

gli elementi di V sono detti vettori.

2) $\exists\, \underline{*} : \mathbb{K} \times V \to V$

tale che

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall \bar{v}, \bar{w} \in V$

1) $(\alpha+\beta) * \bar{v} = \alpha * \bar{v} \oplus \beta * \bar{v}$

2) $\alpha * (\bar{v} \oplus \bar{w}) = (\alpha * \bar{v}) \oplus (\alpha * \bar{w})$

3) $(\alpha\beta) * \bar{v} = \alpha * (\beta * \bar{v})$.

4) $1 * \bar{v} = \bar{v}$

N.B. • gli elementi di $\mathbb{K}$ sono detti scalari

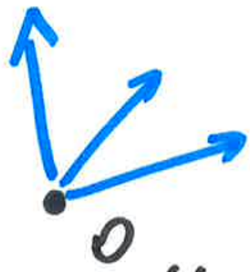
• $\underline{0}$ è l'elemento neutro di $(V, \oplus) \to$ vettore nullo.

2) <u>Esempi</u>

1) Sia $\mathbb{K}$ un campo $\Rightarrow$ $\mathbb{K}$ é spazio vettoriale su se stesso ove

$$*: \begin{cases} \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \\ \alpha, \beta \longrightarrow \alpha\beta \end{cases}$$

B) Consideriamo un punto O fissato nel piano e tutti i <u>segmenti orientati</u> di origine O
↓
freccia.

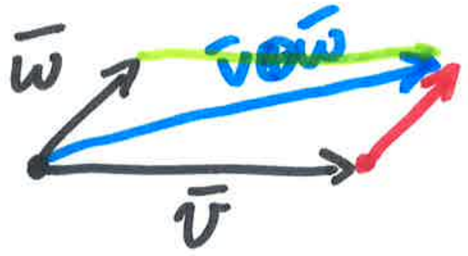


questi li chiamiamo <u>vettori</u>

<u>Def</u> come somma di 2 seg. orientati puntati in O il seg. orientato che si origina in O e ha come termine il punto che si ottiene mettendo i 2 segmenti uno dopo la "punta" dell'altro.

3)

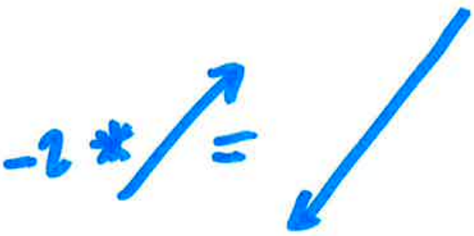
SOMMA



$\alpha \in \mathbb{R}$: se $\alpha \geq 0$

$\alpha * \bar{v}$ come la freccia
che ha stessa direzione
stesso verso di $\bar{v}$
e lunghezza α volte
la lunghezza di $\bar{v}$.

se $\alpha < 0$
$\alpha * \bar{v}$ vettore che ha la
stessa direzione di $\bar{v}$,
verso opposto e lunghezza
$-\alpha$ volte la lunghezza di $\bar{v}$

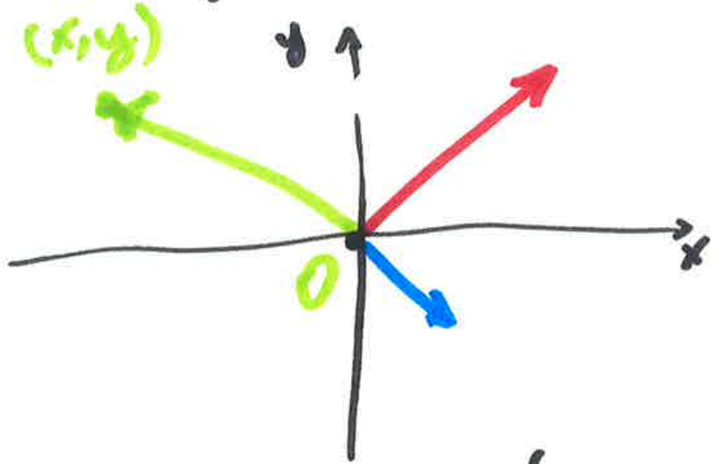


4)

$$(-1) * \nearrow \oplus \nearrow = \swarrow \oplus \nearrow = \nearrow\!\!\!\swarrow 0 = \underline{0}$$

$$\ominus \nearrow = -1 * \nearrow$$

mettiamoci nel piano Cartesiano



come possiamo rappresentare i vettori.

Un vettore* è univocamente individuato dalla posizione della sua "punta".

→ possiamo individuarlo fornendo semplicemente le coordinate (x,y) della sua "punta".

Siano $\bar{v}$ e $\bar{w}$ due vettori di coordinate (x,y) e (x',y') ⇒

5) $\bar{v} \oplus \bar{w}$ ha coordinate $(x+x', y+y')$
e $\alpha * \bar{v}$ ha coordinate $(\alpha x, \alpha y)$

—

$\mathbb{K}^2 = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{K}\}$.

1) $(x,y) \oplus (x',y') = (x+x', y+y')$.

2) $\alpha \in \mathbb{K}$ $\alpha * (x,y) = (\alpha x, \alpha y)$.

somma e prodotto
componente per componente.

verifichiamo che valgono le
prop. di spazio vettoriale

$(\mathbb{K}^2, \oplus)$ é un gruppo abeliano.

1) $(0,0) \in \mathbb{K}^2$ e $(x,y) \oplus (0\ 0) = (x+0, y+0)$
$= (x,y)$

$(0,0) \oplus (x,y) = (0+x, 0+y)$
$= (x,y)$.

2) $(x,y) \oplus (x',y') = (x+x', y+y') =$
$= (y'+y, x'+x) = (x',y') \oplus (x,y)$

3) Dato (x,y) considero
$(x,y) \oplus (-x,-y) = (x-x, y-y) =$
$= (0,0)$

inversa

4) Dati $(x,y), (x',y'), (x'',y'')$.

$((x,y) \oplus (x'y')) \oplus (x'',y'') =$

$= (x+x', y+y') \oplus (x'',y'') =$

$= ((x+x')+x'', (y+y')+y'') =$

$= (x+(x'+x''), y+(y'+y'')) =$

$= (x,y) \oplus (x'+x'', y'+y'') =$

$= (x,y) \oplus ((x'+y') \oplus (x'',y''))$.

vale anche l'associativa.

7)

$$(\alpha+\beta) * (x,y) =$$

$$= ((\alpha+\beta)x, (\alpha+\beta)y) =$$

$$= (\alpha x+\beta x, \alpha y+\beta y) =$$

$$= (\alpha x, \alpha y) \oplus (\beta x, \beta y) =$$

$$= \alpha * (x,y) \oplus \beta * (x,y)$$

$$\alpha * ((x,y) \oplus (x',y')) =$$

$$= \alpha * (x+x', y+y') =$$

$$= (\alpha(x+x'), \alpha(y+y')) =$$

$$= (\alpha x+\alpha x', \alpha y+\alpha y') =$$

$$= (\alpha x, \alpha y) \oplus (\alpha x', \alpha y') =$$

$$= \alpha * (x,y) \oplus \alpha * (x',y').$$

$$(\alpha\beta) * (x,y) = ((\alpha\beta)x, (\alpha\beta)y) =$$

$$= (\alpha(\beta x), \alpha(\beta y)) =$$

$$= \alpha * (\beta x, \beta y) = \alpha * (\beta * (x,y))$$

$$1 * (x, y) = (1x, 1y) = (x, y)$$

$\square$

$\rightarrow \quad (\mathbb{K}^2, +)$

somma componente per componente

prodotto componente per componente $\mathbb{K} \times \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$

é uno spazio vettoriale.

—

$$\mathbb{K}^n = \{ (a_1 a_2 \dots a_n) \mid a_i \in \mathbb{K} \}.$$

$$(a_1 \dots a_n) + (b_1 \dots b_n) := (a_1 + b_1 \; a_2 + b_2 \dots a_n + b_n).$$

$$\alpha \in \mathbb{K}: \quad \alpha \cdot (a_1 \dots a_n) := (\alpha a_1 \dots \alpha a_n).$$

$\mathbb{R}^3 \qquad (1,2,3) + (7,8,6) = (8,10,9)$

$$-3 \cdot (1 \; 0 \; -1) = (-3 \; 0 \; 3)$$

8)

$\mathbb{K}^{m,n}$ insieme delle matrici $m \times n$ ad entrate in $\mathbb{K}$.

<u>MATRICE</u> È UNA TABELLA DI m righe ed n colonne con valori in $\mathbb{K}$.

$$\mathbb{K}^{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c,d \in \mathbb{K} \right\}.$$

$$\mathbb{K}^{2,3} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c,d,e,f \in \mathbb{K} \right\}.$$

$$\mathbb{K}^{1,3} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c \in \mathbb{K} \right\}.$$

$$\mathbb{K}^{3,1} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \,\middle|\, a\ b\ c \in \mathbb{K} \right\}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,1}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1,3}$$

9)

$\mathbb{K}^{1,t}$ é detto insieme dei vettori riga di lunghezza t

$\mathbb{K}^{t,1}$ é detto insieme dei vettori colonna di lunghezza t.

$\mathbb{K}^{1,2} = \{(a\ b) \mid a, b \in \mathbb{K}\}$.

$\mathbb{K}^{2,1} = \left\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{K}\right\}$. $\quad \mathbb{K}^2$

<u>N.B</u> $\mathbb{K}^{1,t} \neq \mathbb{K}^{t,1}$ se $t \neq 1$

Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ una matrice

$\cancel{m_{11} \ m_{12} \dots m_{1n}}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m,n}$$

a_{ij}

Righe di A sono elementi di $\mathbb{K}^{1,n}$ del tipo

$(a_{i1} \dots a_{in})$ con i fissato

Colonne di A sono elementi di $\mathbb{K}^{m,1}$ del tipo $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$

Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$. Si dice matrice trasposta di A la matrice ${}^tA \in \mathbb{K}^{n,m}$ che si ottiene scambiando fra loro le righe e le colonne di A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^tB = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$\bar{v}$ = vettore riga $(a_{11} \dots a_{1n})$

${}^t\bar{v}$ = vettore colonna. $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}$

n)

$$\boxed{\mathbb{K}^n = \mathbb{K}^{1,n}} \quad \mathbb{K}^{n,1}$$

$\mathbb{K}^{m,n}$ é dotato di una struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

OVE LA SOMMA É DEFINITA <u>COMPONENTE PER COMPONENTE</u> COME PURE IL PRODOTTO PER SCALARE.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\alpha \in \mathbb{K}$$

$$A+B := \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & & \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

B

$$\mathbb{K}[x] = \{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \dots \mid a_i \in \mathbb{K}\}.$$

insieme di tutti i polinomi a coeff. in $\mathbb{K}$ nell'indeterminata x

$$p(x) = p_0 + p_1 x + \dots + p_{n-1} x^{n-1} + \dots$$

$$q(x) = q_0 + q_1 x + \dots q_{n-1} x^{n-1} + \dots$$

$$(p+q)(x) := (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1) x + \dots + (p_{n-1} + q_{n-1}) x^{n-1} + \dots$$

$$(\alpha p)(x) := \alpha p_0 + (\alpha p_1) x + \dots + (\alpha p_{n-1}) x^{n-1} + \dots$$