Data una matrice quadrata $M \in \mathbb{K}^{n,n}$

$\exists$ $\det : \begin{cases} \mathbb{K}^{n,n} \longrightarrow \mathbb{K} \\ A \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \Gamma_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij} \end{cases}$

$\Gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$

$\det((a_{11})) = a_{11}$

$\forall j$

I Teorema di Laplace

oss: per calcolare il det di una matrice $n \times n$ serve calcolare n determinanti di matrici $(n-1) \times (n-1)$

$\Rightarrow$ in generale il numero totale di operazioni da farsi è $O(n!)$

$\det M$ con $M \in \mathbb{K}^{23,23}$

Teorema: esiste una ed una sola funzione

$\det : \mathbb{K}^{n,n} \rightarrow \mathbb{K}$ che gode delle seguenti 3 proprietà:

1) $\det I_n = 1$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

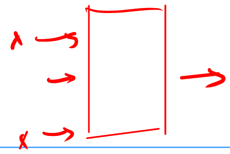
2) Se A ed A' sono 2 matrici in cui A' si ottiene da A scambiando fra loro 2 colonne $\Rightarrow$

$\det A' = -\det A$ (det è alternante)

3) det è multilineare cioè

supponiamo $A = \left(C_1 \;\middle|\; \dots \;\middle|\; \alpha C_i + \beta C_i' \;\middle|\; \dots \;\middle|\; C_n \right) =$

$= \det A = \alpha \det(C_1 \_ C_i \_ C_n) + \beta \det(C_1 \_ C_i' \_ C_n)$ $\square$



Es: verificare che det definito dalla formula di Laplace soddisfa le 3 proprietà

Il teorema ci dice che $\forall$ funzione che soddisfa le 3 proprietà coincide col determinante dato da Laplace.

→ Si vede subito che det non dipende dalla riga rispetto cui si sviluppa.

→ Si vede, riscrivendo il det in termini di permutazioni che $\boxed{\det A = \det {}^t A}$ ⇒ tutto quello che dirò relativo le colonne di A si può dire anche delle righe di A

oss: Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ è detta triangolare superiore se $\forall i > j,\ a_{ij} = 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

sono tutte $= 0$

proposizione: Sia A triangolare sup. $\Rightarrow \det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11} a_{22} \det \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{44} \end{pmatrix} =$$

$= a_{11} a_{22} a_{33} \det(a_{44}) =$

$= a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$

per induzione su n. $\quad A$ per ipotesi triangolare superiore

$n=1 \Rightarrow \det((a_{11})) = a_{11}$

$(n-1) \Rightarrow n \quad$ se $\forall A' \in \mathbb{K}^{n-1,n-1}$ triang. sup vale

$$\det A' = a'_{11} a'_{22} \text{——} a'_{n-1\, n-1}$$

$\Rightarrow \forall A \in \mathbb{K}^{n,n}$ triang. sup. vale la prop

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \text{——} & a_{1n} \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} a_{22} & & \\ & A' & \\ 0 & & a_{nn} \end{matrix}} \\ | & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \cdot \det A' = a_{11} a_{22} \text{———} a_{nn} \qquad \square$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 5 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 15 \qquad \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 & 6 \\ 0 & 5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 0$$

DATA UNA MATRICE A esiste sempre un algoritmo che ci porta ad una matrice A' con $\det A' = \pm \det A$ ed A' triangolare superiore.
→ la complessità di questo algoritmo è $O(n)$

PROPRIETÀ DEI DETERMINANTI

1) Se in A c'è una riga/colonna di $0 \Rightarrow \det A = 0$

2) Se in A ci sono 2 colonne/righe uguali $\Rightarrow \det A = 0$

DIM $\det A = -\det \hat{A}$ ove $\hat{A}$ è la matrice ottenuta da A scambiando le 2 colonne uguali $\Rightarrow \hat{A} = A$

$\Rightarrow \det A = -\det A \Rightarrow \det A = 0$

3) Se in A ci sono 2 colonne proporzionali $\Rightarrow$
$\Rightarrow \det A = 0$

$$\det(C_1 \; C_2 \; \text{—} \; \underset{C_i}{\alpha C_1} \; \text{—} \; C_n) =$$

$$= \alpha \det(C_1 \; C_2 \; \text{—} \; C_1 \; \text{—} \; C_n) = 0$$

4) Se in A sommiamo ad una colonna una c. lineare delle rimanenti $\Rightarrow \det A$ non cambia.

$$A = (C_1 \; \text{—} \; C_i \; \text{—} \; C_n)$$

$$\det(C_1 \; \text{—} \; C_i + \sum_{j\neq i} \alpha_j C_j \; \text{—} \; C_n) =$$

$$= \det(C_1 \; \text{—} \; C_i \; \text{—} \; C_n) + \sum_{j \neq i} \det(C_1 \; \text{—} \; \overset{i}{\alpha_j C_j} \; \text{—} \; C_n)$$

$$= \det(C_1 \; \text{—} \; C_n) = \det A$$

CONSEGUENZA: se le colonne/righe di A sono linearmente dipendenti $\Rightarrow \det A = 0$

DIM Se le colonne di A sono lin. dipendenti $\Rightarrow$ una di esse è combinazione lineare delle rimanenti $C_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j C_j$

$$\Rightarrow \det(C_1 \; \text{—} \; \overset{i\text{-esima}}{\sum_{j\neq i} \alpha_j C_j} \; \text{—} \; C_n) =$$

$$= \sum_{j \neq i} \alpha_j \det(C_1 \; \text{—} \; C_j \; \text{—} \; C_n) = 0$$

□

In particolare: se $\det A \neq 0 \Rightarrow$ le colonne (righe) di A

sono una base di $\mathbb{K}^n$ (vale anche il viceversa).

$$\mathcal{B} = ((1\ 5\ 3), (0\ 1\ 2), (0\ 0\ 1)) \subseteq \mathbb{R}^3$$

BASE? $\quad \det\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{B}$ libera $\Rightarrow \mathcal{B}$ base.

$$\mathcal{B}' = ((0\ 5\ 3), (1\ 0\ 1), (1\ 2\ 1))$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= 2\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 6\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 6\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

procedura di Gauss $\rightarrow$ possiamo scrivere il det. di una qualsiasi matrice come $\alpha \det I_n$ ove α e dI si ottengono manipolando le righe di A con operazioni che o non cambiano il det o lo moltiplicano per un coeff. che abbiamo.

```julia
using LinearAlgebra

function minor(m,i,j)
        m[1:end .!= i, 1:end .!= j ]
end

function laplace(m,i=1)
    size(m)==(1,1) && return m[1,1]
    reduce(+,[ (-1)^(i+j)*m[i,j]*laplace(minor(m,i,j)) for j in 1:size(m)[2] ])
end

function gauss(a)
    m=copy(a)
    n=size(m)[1]
    n==1 && return m[1,1]
    res=1
    i=findfirst(x->x!=0,m[:,1])
    i≡nothing && return 0
    if i>1
      m[1,:],m[i,:]=m[i,:],m[1,:]
      res *= -1
    end
    res *= m[1,1]
    m[1,:] /= m[1,1]
    for j in 2:n
       m[j,:] -= m[j,1]*m[1,:]
    end
    res*gauss(minor(m,1,1))
end
```

j-esima

i-esima

$$\begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{ij} \det M_{ij}$$

$(a \ b \ c) \to (a+b)+c$

scambio

$\neq 0$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} \det \begin{pmatrix} 1 & a_{12}a_{11}^{-1} & \cdots & a_{1n}a_{11}^{-1} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots \\ 0 & \\ 0 & M' \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$33{,}3 \notin \mathbb{Z}$

→ Sistemi lineari

NOZIONI SUI SOTTOSPAZI VETTORIALI

→ INTERSEZIONE E SOMMA

$V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e siano

$U, W \leq V(\mathbb{K})$ sottospazi

cosa sono $U \cap W$ e $U \cup W$?!

In generale $\mathcal{U} \cap W \leq V(\mathbb{K})$ e in particolare

$$0 \leq \dim(\mathcal{U} \cap W) \leq \min(\dim(\mathcal{U}), \dim(W))$$

DIM

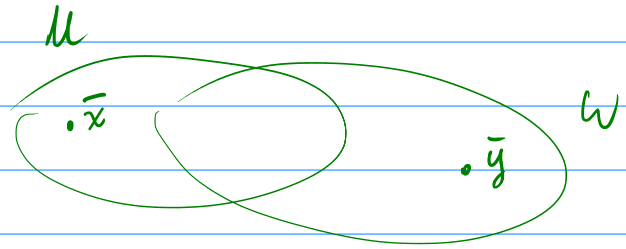
$\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{U} \cap W \Rightarrow$ ◦) $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{U} \Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}:$ $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in \mathcal{U}$

◦◦) $\bar{x}, \bar{y} \in W \Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in W$

$\Rightarrow \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \in \mathcal{U} \cap W \Rightarrow \mathcal{U} \cap W \leq V(\mathbb{K})$ □

OSS $\mathcal{U} \cup W$ é sottospazio $\Leftrightarrow \mathcal{U} \subseteq W$ oppure $W \subseteq \mathcal{U}$

cioé $\mathcal{U} \cup W = \mathcal{U}$ oppure $\mathcal{U} \cup W = W$



DIM. Siano $\bar{x} \in \mathcal{U} \setminus W$ ed $\bar{y} \in W \setminus \mathcal{U}$.

se fosse $\mathcal{U} \cup W \leq V(\mathbb{K}) \Rightarrow \bar{x} + \bar{y} \in \mathcal{U} \cup W$

e quindi $\bar{x} + \bar{y} \in \mathcal{U}$ oppure $\bar{x} + \bar{y} \in W$

ma se $\bar{x} + \bar{y} \in \mathcal{U} \Rightarrow (\bar{x} + \bar{y}) - \bar{x} = \bar{y} \in \mathcal{U}$ ↯

se $\bar{x} + \bar{y} \in W \Rightarrow (\bar{x} + \bar{y}) - \bar{y} = \bar{x} \in W$ ↯

e quindi abbiamo una contraddizione □

Se $\mathcal{U} \cup W \not\leq V(\mathbb{K})$ possiamo prendere

$\mathcal{L}(\mathcal{U} \cup W)$ che sicuramente

sará sottospazio di $V(\mathbb{K})$ e conterrá sia $\mathcal{U}$ che W.

Vogliamo descrivere/costruire $\mathcal{L}(\mathcal{U} \cup W)$ cioè il più piccolo sottospazio di $V(\mathbb{K})$ che contiene sia $\mathcal{U}$ che W.

Def: Siano $\mathcal{U}, W \leq V(\mathbb{K})$ si chiama <u>somma</u> di $\mathcal{U}$ e W il sottoinsieme

$$\boxed{\mathcal{U}+W=\{\bar{u}+\bar{w} \mid \bar{u} \in \mathcal{U}, \bar{w} \in W\}}$$

Teorema $\mathcal{U}+W=\mathcal{L}(\mathcal{U} \cup W)$ cioè $\mathcal{U}+W$ è il più piccolo sottospazio di $V(\mathbb{K})$ che li contiene entrambi.

<u>DIM</u> 1) $\mathcal{U}+W \leq V(\mathbb{K})$ infatti siano

$$\bar{x}=\bar{u}+\bar{w}, \quad \bar{x}'=\bar{u}'+\bar{w}' \in \mathcal{U}+W$$

$$\Rightarrow \alpha\bar{x}+\beta\bar{x}'=\alpha(\bar{u}+\bar{w})+\beta(\bar{u}'+\bar{w}')=\underbrace{(\alpha\bar{u}+\beta\bar{u}')}_{\in \mathcal{U}}+\underbrace{(\alpha\bar{w}+\beta\bar{w}')}_{\in W}$$

$$=\bar{u}''+\bar{w}'' \in \mathcal{U}+W$$

2) $\mathcal{U}=\{\bar{u}+\underline{0} \mid \bar{u} \in \mathcal{U}, \underline{0} \in W\} \subseteq \mathcal{U}+W$

$W=\{\underline{0}+\bar{w} \mid \bar{w} \in W\} \subseteq \mathcal{U}+W$

Supponiamo che $X \leq V(\mathbb{K})$ con $\mathcal{U}, W \leq X$

$\Rightarrow$ in particolare $\forall \bar{u} \in \mathcal{U}, \forall \bar{w} \in W$,

$$\bar{u}+\bar{w} \in X \Rightarrow \mathcal{U}+W \subseteq X$$

$\Rightarrow \mathcal{U}+W$ è effettivamente il più piccolo sottospazio che contiene sia $\mathcal{U}$ che W.

OSS: Sia $\mathcal{B}_U$ una base di U e $\mathcal{B}_W$ una base di W

$\Rightarrow \mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W = \mathcal{G}_{U+W}$ è un sistema di generatori per $U+W$.

IN GENERALE GLI ELEMENTI DI $\mathcal{G}_{U+W}$ <u>NON</u> sono liberi.

Esempio: in $\mathbb{R}^4$

$$U = \mathcal{L}((1000),(0100))$$
$$W = \mathcal{L}((1100),(0010))$$

$$U+W = \mathcal{L}((1000),(0100),\cancel{(1100)},(0010))$$

$(1100) \in U \cap W$

è c. lineare dei vettori (1000) e (0100).

DIM: Sia $\mathcal{B}_U = \{\bar{e}_1 \ldots \bar{e}_m\}$ $\mathcal{B}_W = \{\bar{f}_1 \ldots \bar{f}_k\}$.

$\Rightarrow \bar{x} \in U+W \Rightarrow \bar{x} = \bar{u} + \bar{w}$ con $\bar{u} \in U, \bar{w} \in W \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{x} = \sum u_i \bar{e}_i + \sum w_j \bar{f}_j \Rightarrow \bar{x} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W)$ $\square$

$$\max(\dim U, \dim W) \leq \dim(U+W) \leq n = \dim V$$
$$0 \leq \dim(U \cap W) \leq \min(\dim U, \dim W)$$

FORMULA DI GRASSMANN

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

Quando $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W)$?

cioè quando l'unione di una base (seq. libera) di U ed una base (seq. libera) di W è una base (seq. libera) di $U+W$

Def Siano $U, W \leq V(\mathbb{K})$, si dice che U, W sono in <u>somma diretta</u> e si scrive

$$U \oplus W$$

se $\forall \bar{v} \in U+W \ \exists! \ \bar{u} \in U, \exists! \bar{w} \in W : \bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$

(se ogni vettore della somma $U+W$ si scrive in modo unico come somma di un vettore di U ed un vettore di W).

<u>Teorema</u>: $U \oplus W \iff U \cap W = \{\underline{0}\}$

<u>DIM</u> $(\Rightarrow)$ Supponiamo $U \oplus W$ e sia $\bar{x} \in U \cap W$

$\Rightarrow \forall \bar{v} \in U \oplus W \ \exists! \ \bar{u} \in U \ \exists! \ \bar{w} \in W$ tale che $\bar{v} = \bar{u} + \bar{w} = (\bar{u} + \bar{x}) + (\bar{w} - \bar{x})$ con

$\bar{u} + \bar{x} \in U$ e $\bar{w} - \bar{x} \in W$ $\Rightarrow \begin{cases} \bar{u} + \bar{x} = \bar{u} \\ \bar{w} - \bar{x} = \bar{w} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{x} = \underline{0}$

$(\Leftarrow)$ Supponiamo $U \cap W = \{0\}$ e sia $\bar{v} \in U + W$ un vettore che si scrive in almeno 2 modi come somma di un vettore di U ed uno di W

$\Rightarrow \quad \bar{v} = \bar{u} + \bar{w} = \bar{u}' + \bar{w}' \qquad$ con $\bar{u}, \bar{u}' \in U$
$\bar{w}, \bar{w}' \in W$

$$\Rightarrow \underbrace{\bar{u} - \bar{u}'}_{\in U} = \underbrace{\bar{w}' - \bar{w}}_{\in W} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \bar{u} - \bar{u}' \in U \cap W = \{\underline{0}\}. \\ \bar{w}' - \bar{w} \in U \cap W = \{\underline{0}\}. \end{array}$$

$$\Rightarrow \bar{u} - \bar{u}' = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \bar{u} = \bar{u}' \text{ e } \bar{w} = \bar{w}' \quad \lightning$$

quindi $U \oplus W$. $\square$

<u>Teorema</u>: siano $U, W \leq V(\mathbb{K})$ con $U \oplus W$

$\Rightarrow$ l'unione di una base di U con una base di W è una base di $U \oplus W$

<u>DIM</u> $\quad \mathcal{B}_U = (\bar{e}_1 \text{ — } \bar{e}_m) \qquad \mathcal{B}_W = (\bar{f}_1 \text{ — } \bar{f}_n)$

$\underline{0} \in U \oplus W$ per ipotesi $\underline{0} = \underline{0} + \underline{0}$

si scrive in modo unico come somma di un vettore di U ed uno di W

$$\underline{0} = \underline{0} + \underline{0}$$

ma poiché $\mathcal{B}_U$ base $\underline{0} \in U$ si scrive in modo unico come c. lineare di $(\bar{e}_1 \text{ — } \bar{e}_m)$

e poiché $\mathcal{B}_W$ base $\underline{0} \in W$ si scrive in modo unico come c. lineare di $(\bar{f}_1 \text{ — } \bar{f}_n)$

$\Rightarrow$ l'unica comb. lineare

$$\underline{0} = \underbrace{\alpha_1 \bar{e}_1 + \text{—} + \alpha_m \bar{e}_m}_{\underline{0}} + \underbrace{\beta_1 \bar{f}_1 + \text{—} \beta_n \bar{f}_n}_{\underline{0}}$$

è con $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$ e $\beta_1 = \text{—} \beta_n = 0$

$\Rightarrow \mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ è libera $\square$

In particolare se $U \oplus W \Rightarrow$

$$\boxed{\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W}$$

$$= \dim U + \dim W - \dim U \cap W$$

visto che $\dim(U \cap W) = 0$