Copertura lineare.

Dato uno spazio vettoriale $V(\mathbb{K})$

$$\underset{\text{sottoinsieme}}{X \subseteq V(\mathbb{K})} \longmapsto \underset{\text{sottospazio}}{\mathcal{L}(X) \leq V(\mathbb{K})}$$

|| $\mathcal{L}(X)$ é il più piccolo sottospazio di $V(\mathbb{K})$ che contiene X ||

$$\mathcal{L}(\emptyset) = \{\underline{0}\}$$

$X = ((1\,0\,0), (0\,1\,0), (0\,0\,1)) \subseteq \mathbb{R}^3$

$\mathcal{L}(X) = \mathbb{R}^3$

3 vettori

$X' = ((1\,0\,1), (0\,1\,1), (1\,1\,1), \cancel{(0\,2\,2)})$

$\mathcal{L}(X') = \mathbb{R}^3$

4 vettori

$X'' \subseteq X'$ $\quad X'' = ((1\,0\,1), (0\,1\,1), (1\,1\,1))$

$\mathcal{L}(X'') = \mathcal{L}(X')$

In X'' ci sono degli elementi superflui ai fini della generazione di $\mathbb{R}^3$

Def. Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e sia $S = (\overline{v}_1 \ldots \overline{v}_n)$ una sequenza di vettori di $V(\mathbb{K})$.

S é detta <u>libera</u> se l'unica combinazione lineare di vettori di S che dà $\underline{0} \in V(\mathbb{K})$ é quella con coeff. tutti uguali a 0.

$$\alpha_1\overline{v}_1 + \alpha_2\overline{v}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{v}_n = \underline{0} \Rightarrow (\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_n) = (0\,0 \ldots 0)$$

S é <u>legata</u> se non é libera.

$$\exists\, (\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_n) \neq (0\,0 \ldots 0) \;!\; \alpha_1\overline{v}_1 + \alpha_2\overline{v}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{v}_n = \underline{0}$$

c'é <u>almeno</u> una combinazione lineare a coeff. non tutti 0 che dá $\underline{0}$

$\underline{\text{oss}}$: 1) Se $\underline{0} \in S$ = S é legata. $S = (\overset{\bar{v}_0 \atop \shortparallel}{\underline{0}}, \bar{v}_1\ \bar{v}_2 \text{---} \bar{v}_{n-1})$.

$$\underset{\uparrow}{1} \cdot \underline{0} + \underset{\uparrow}{0}\, \bar{v}_1 + \text{———} \underset{\uparrow}{0} \cdot \bar{v}_{n-1} = \underline{0}$$

2) Se due vettori di S sono uguali $\Rightarrow S$ é legata.

$$(\bar{v}_1, \bar{v}_2 = \bar{v}_1, \bar{v}_3 \text{———} \bar{v}_n)$$

$$1 \cdot \bar{v}_1 + (-1) \cdot \bar{v}_2 + 0 \cdot \bar{v}_3 + \text{———} + 0 \cdot \bar{v}_n =$$

$$= \bar{v}_1 - \bar{v}_1 = \underline{0}$$

Teorema: Una sequenza S é legata se e solamente se almeno uno dei vettori di S é combinazione lineare dei rimanenti.

$$S = (\bar{v}_1 \text{———} \bar{v}_n)$$

$\underline{\text{DIM}}$ HP: S legata $\Rightarrow$ TS: $\exists\, \bar{v}_i \in S$ con $\bar{v}_i = \sum_{j \neq i} \beta_j \bar{v}_j$

S legata $\Rightarrow \exists\, (\alpha_1 \text{—} \alpha_i \text{——} \alpha_n) \neq (0 \text{——} 0)$ tali che

$$\alpha_1 \bar{v}_1 + \text{——} + \alpha_i \bar{v}_i + \text{——} + \alpha_n \bar{v}_n = \underline{0} \qquad \alpha_i \neq 0$$

$$\underbrace{\alpha_1 \bar{v}_1 + \text{——} \alpha_{i-1} \bar{v}_{i-1} + \alpha_{i+1} \bar{v}_{i+1} + \text{——} + \alpha_n v_n}_{= \sum_{j \neq i} \alpha_j \bar{v}_j} = -\alpha_i \bar{v}_i$$

ma $\alpha_i \neq 0 \Rightarrow \exists\, \alpha_i^{-1} \in \mathbb{K} \Rightarrow$ moltiplicando per $(-\alpha_i)^{-1}$

$$-\alpha_i^{-1} \sum_{j \neq i} \alpha_j \bar{v}_j = (-\alpha_i)^{-1} (-\alpha_i) \bar{v}_i = \bar{v}_i$$

e quindi $\bar{v}_i$ é combinazione lineare degli altri vettori $\beta_j = -\alpha_i^{-1} \alpha_j$

<u>HP</u> $\bar{v}_i = \sum_{j \neq i} \beta_j \bar{v}_j \Rightarrow \nexists$ S legata.

$$\bar{v}_i - \sum_{j \neq i} \beta_j \bar{v}_j = \underline{0}$$

c. lineare dei vettori di S in cui il coeff di $\bar{v}_i$ é $1 \neq 0$ e che dá $\underline{0}$ | $\Rightarrow$ S legata

$\square$

<u>oss</u>: Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale ed S una sequenza di suoi vettori $(\bar{v}_1 \_\_\_ \bar{v}_n)$

$\Rightarrow$ Se un vettore $\bar{v}_i \in S$ é combinazione lineare dei rimanenti $\Rightarrow$ $\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(S \setminus \{\bar{v}_i\})$

cioe' S é legata e $\bar{v}_i$ é proprio un vettore che si scrive nei termini dei rimanenti

$S = (\bar{v}_1 \_\_\_ \bar{v}_i \_\_\_ \bar{v}_n)$ $\quad$ $\bar{v}_i = \sum_{j \neq i} \beta_j \bar{v}_j$

$\bar{w} \in \mathcal{L}(S) \Rightarrow \exists\, \alpha_1 \_\_\_ \alpha_n$ tali che $\bar{w} = \sum_{j} \alpha_j \bar{v}_j =$

$$= \sum_{j \neq i} \alpha_j \bar{v}_j + \alpha_i \bar{v}_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j \bar{v}_j + \alpha_i \sum_{j \neq i} \beta_j \bar{v}_j =$$

$$= \sum_{j \neq i} (\alpha_j + \alpha_i \beta_j)\, \bar{v}_j \in \mathcal{L}(S \setminus \{\bar{v}_i\})$$

Dunque $\mathcal{L}(S) \subseteq \mathcal{L}(S \setminus \{\bar{v}_i\})$

d'altro canto $\mathcal{L}(S \setminus \{\bar{v}_i\}) \subseteq \mathcal{L}(S) \Rightarrow \mathcal{L}(S \setminus \{\bar{v}_i\}) = \mathcal{L}(S)$

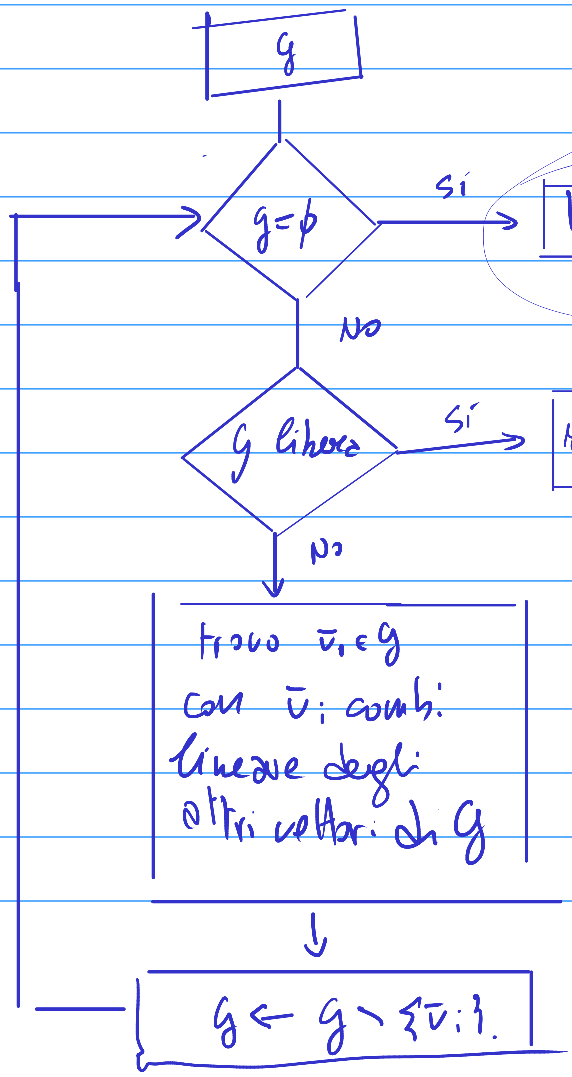
$\square$

Def: Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale.
Una sequenza libera di generatori di $V(\mathbb{K})$ è detta base di $V(\mathbb{K})$. (base ordinata).

Teorema (basato sull'assioma della scelta): ogni spazio vettoriale ammette una base tranne $\{\underline{0}\}$.

Teorema: Sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale finitamente generato non banale ($\neq \{\underline{0}\}$) ammette delle basi → in particolare data una sequenza finita g di generatori di $V(\mathbb{K})$ è sempre possibile trovare una sottosequenza di g che è base di $V(\mathbb{K})$.

METODO DEGLI SCARTI SUCCESSIVI



Visto che g è finita la procedura termina in al più $|g|$ passaggi □

N.B Se $\bar{v} \in V(\mathbb{K})$ e $\bar{v} \neq \underline{0} \Rightarrow$

$S = (\bar{v})$ é libera

un solo vettore $\neq \underline{0}$

Esercizio.

$X = ((1\,0\,0), (0\,1\,0), (0\,0\,1)) \subseteq \mathbb{R}^3$

$\mathcal{L}(X) = \mathbb{R}^3$

$X' = ((1\,0\,1), (0\,1\,1), (1\,1\,1), \cancel{(0\,2\,2)})$

$\mathcal{L}(X') = \mathbb{R}^3$ 4 vettori

$\mathcal{L}(X) \leq \mathbb{R}^3$ per definizione di $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}(X) = \{\alpha(1\,0\,0) + \beta(0\,1\,0) + \gamma(0\,0\,1) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

$$\{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

$$= \mathbb{R}^3 \qquad \square$$

$$X' = ((1\,0\,1), (0\,1\,1), (1\,1\,1), (0\,2\,2))$$

MODO "FURBO"

1) SCARTI SUCCESSIVI

2) ~~cosa~~ cosa genera

$$\mathcal{L}(X') = \{\alpha(1\,0\,1) + \beta(0\,1\,1) + \gamma(1\,1\,1) + \delta(0\,2\,2) \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}.$$

II

$$\{(\alpha+\gamma,\ \beta+\gamma+2\delta,\ \alpha+\beta+\gamma+2\delta)\in\mathbb{R}^3 \mid \alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}\}$$

MOSTRIAMO CHE $\forall\ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ é anche elemento di $\mathcal{L}(X')$.

$$(a\quad b\quad c) = (\alpha+\beta\quad \beta+\gamma+2\delta\quad \alpha+\beta+\gamma+2\delta)$$

$a = \alpha+\beta$

$b = \beta+\gamma+2\delta$

$c = \alpha+\beta+\gamma+2\delta$

DEVO TROVARE VALORI DI $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ CHE MI DIANO a,b,c

$$\boxed{\begin{aligned}\alpha &= a-\beta\\ \gamma &= b-2\delta-\beta\end{aligned}}$$

$$\cancel{2\delta} = c-\alpha-\beta-\gamma = c-(a-\beta)-(b-2\delta-\beta) =$$

$$= c - a + \beta - b + \cancel{2\delta} + \beta - \beta$$

$$0 = c - a - b + \beta$$

$$\boxed{\beta = (a+b-c)}$$

δ é quello che vuole

I) (a,b,c) NON SI SCRIVE IN MODO UNICO!

II) che ogni (a,b,c) si può scrivere come elemento di $\mathcal{L}(X') \Rightarrow \mathcal{L}(X') = \mathbb{R}^3$.

$X' = \left(\overset{\bar v_1}{(1\,0\,1)}, \cancel{\overset{\bar v_2}{(0\,1\,1)}}, \overset{\bar v_3}{(1\,1\,1)}, \overset{\bar v_4}{(0\,2\,2)} \right)$

X' libera o legata?

$0 \cdot \bar v_1 + 2 \bar v_2 + 0 \cdot \bar v_3 - \bar v_4 = \underline{0}$

$\downarrow$

legata.

Scarti successivi $X'' = X' \setminus \{\bar v_2\}$.

$\{(1\,0\,1), (1\,1\,1)\ (0\,2\,2)\}$

libera o legata?

$\alpha(1\,0\,1) + \beta(1\,1\,1) + \gamma(0\,2\,2) = (0\,0\,0)$?

$$\begin{cases} \boxed{\alpha + \beta} = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \\ \boxed{\alpha + \beta} + 2\gamma = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{\text{libera}}.$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \beta + 2\gamma = b \\ \alpha + \beta + 2\gamma = c \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \alpha = a - \beta = c - b \\ \beta = b - 2\gamma = b - c + a \\ \gamma = \frac{1}{2}(c - a) \end{cases}$$

genera $\mathbb{R}^3$

Teorema: sia $V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale e $\mathcal{B} = (\bar{v}_1 \_\_ \bar{v}_n)$ una <u>sequenza</u> di suoi vettori. Allora $\mathcal{B}$ é base $\Leftrightarrow$ ogni vettore di $V(\mathbb{K})$ si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$.

<u>DIM</u>: <u>HP</u> $\mathcal{B}$ base $\Rightarrow$ <u>TS</u> $\forall \bar{v} \in V(\mathbb{K})$

esiste una ed una sola $\rightarrow$ $\exists! (\alpha_1 \_\_ \alpha_n) \in \mathbb{K}^n :$

$$\bar{v} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \_\_ + \alpha_n \bar{v}_n$$

- $\mathcal{B}$ base $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ sistema di generatori $\Rightarrow \forall \bar{v} \in V \; \exists (\alpha_1 \_ \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ con $v = \alpha_1 \bar{v}_1 \_\_ + \alpha_n \bar{v}_n$.

Supponiamo per assurdo che

$\exists \bar{v} \; \exists (\alpha_1 \_\_ \alpha_n), (\beta_1 \_\_ \beta_n)$

con $\bar{v} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \_\_ + \alpha_n \bar{v}_n =$
$= \beta_1 \bar{v}_1 + \_\_ + \beta_n \bar{v}_n$

e $(\alpha_1 \_\_ \alpha_n) \neq (\beta_1 \_\_ \beta_n)$

$\Rightarrow \quad \underline{0} = \bar{v} - \bar{v} = \sum \alpha_i \bar{v}_i - \sum \beta_i \bar{v}_i =$

$= \sum (\alpha_i - \beta_i) \bar{v}_i$

con almeno un $\alpha_i \neq \beta_i$ $\Rightarrow$ <u>ASSURDO</u>

in questo caso $\mathcal{B}$ non sarebbe libera. NE SEGUE che ogni vettore si scrive in modo unico.

<u>HP</u>: $\forall \bar{v} \in V(\mathbb{K}) \ \exists! (\alpha_1 \_\_ \alpha_n) \in \mathbb{K}^n : \bar{v} = \sum_i \alpha_i \bar{v}_i$

<u>T</u>. $\mathcal{B}$ base.

1) $\underline{0} \in V$ si scrive in modo unico con la c. lineare $(0 0 \_\_ 0)$ $\Rightarrow \mathcal{B}$ è libera

2) $\forall \bar{v} \in V(\mathbb{K})$ è comb. lineare dei vettori di $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{B}) = V(\mathbb{K})$ e $\mathcal{B}$ sequenza di generatori $\square$