UNIVERSITÀ DI BRESCIA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

Algebra e Geometria - Secondo Test - 22/12/2020

Modalità di Esame

1. Ogni studente deve svolgere *esclusivamente* la traccia corrispondente alle iniziali del proprio cognome.
2. Il tempo a disposizione per lo svolgimento del compito è di 1 ora.
3. È permesso l'uso di libri, appunti e/o calcolatrici.
4. Durante l'esame gli studenti dovranno rimanere collegati alla sessione di *microsoft teams* approntata a tale fine.
5. Al termine dell'esame ogni studente dovrà inviare agli indirizzi di posta elettronica `luca.giuzzi@unibs.it` e `silvia.pellegrini@unibs.it` una mail dall'oggetto *Consegna compito studente NOME COGNOME* e contenente in allegato una immagine (in formato jpeg o pdf) del foglio con le risposte alle domande della traccia.
6. Il foglio di risposta al compito deve contenere come prima riga *Nome* e *Cognome* dello studente e deve riportare le sole risposte ai quesiti (non i calcoli corrispondenti).

UNIVERSITÀ DI BRESCIA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

AFJ
ENRV

Algebra e Geometria - Secondo Test - 22/12/2020

Cognome	Nome
Corso di Laurea	Matricola

Ogni studente *deve* svolgere *solamente* la traccia corrispondente all'iniziale del proprio cognome.

Esercizi

1. In $\widetilde{\mathcal{A}_3}(\mathbb{C})$ si considerino il piano $\alpha_k : x + z = k$ e la retta $r_k : \begin{cases} 2x - y = 2 \\ kx + y + (k+2)z = 0 \end{cases}$. Si determinino al variare di $k \in \mathbb{C}$ le coordinate dei punti comuni ad r e ad α.

   Risposta: $k = -1 \pm \sqrt{3} : r \subset \alpha; k \neq -1 \pm \sqrt{3} : r \parallel \alpha, r \cap \alpha = [(-k-2, -2k-4, k+2, 0)]$

2. In $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, fissato il riferimento $\Gamma = (O, \mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3))$ si determini una base $\mathcal{T}$ dello spazio di traslazione del piano $\alpha : 2x - y + z - 1 = 0$.

   Risposta: $\mathcal{T} = (e_1 + 2e_2, -e_1 + 2e_3)$

3. In $\widetilde{\mathcal{E}}_2(\mathbb{C})$ si considerino le coniche di equazione $\mathcal{C}_k : x^2 - y^2 - 2(k-1)xy - 2y - 1 = 0$ al variare del parametro k. Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la conica $\mathcal{C}_k$

   (a) è degenere e se ne determinino le rette componenti.

   Risposta: $k = 1, r_1 : x + y + 1 = 0, r_2 : x - y - 1 = 0$

   (b) è generale e se ne determini la natura.

   Risposta: $k \neq 1$: iperbole.

4. In $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$ si determini la distanza del punto $P = (0, 1, 1)$ dalla retta $r : \begin{cases} x - y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$.

   Risposta: $d = \sqrt{\frac{17}{2}}$

5. Dati il punto $V = [(-1, 0, 1, 0)]$ e la conica $\mathcal{C}$ di equazione $y^2 - 2x^2 - 4xy + 2z - 3 = 0 = x + y - 1$,

   (a) Si determini l'equazione cartesiana del luogo Σ delle rette che proiettano $\mathcal{C}$ da V.

   Risposta: $3y^2 + 2x + 2y + 2z - 7 = 0$

   (b) Si indichi la natura della quadrica sopra ottenuta e quali sono i suoi eventuali punti doppi.

   Risposta: Cilindro; V: unico punto doppio

   (c) Si trovi, se esiste, un piano α che interseca Σ in una circonferenza, giustificando la risposta in caso negativo.

   Risposta: Non esiste, in quanto Σ non è un cilindro ellittico.

6. In $\widetilde{\mathcal{E}}_3(\mathbb{C})$, data la quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione $x^2 + z^2 + 2xy - 1 = 0$,

   (a) si classifichi $\mathcal{Q}$ specificando eventuali punti doppi e la natura dei suoi punti semplici;

   Risposta: Generale; Iperboloide iperbolico

   (b) Si determini, se esiste, un piano α tale che $\mathcal{Q} \cap \alpha$ sia una conica riducibile in due rette reali e distinte.

   Risposta: $\alpha : z = 1$.

UNIVERSITÀ DI BRESCIA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

BGK OSW

Algebra e Geometria - Secondo Test - 22/12/2020

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Ogni studente *deve* svolgere *solamente* la traccia corrispondente all'iniziale del proprio cognome.

Esercizi

1. In $\widetilde{\mathcal{A}_3}(\mathbb{C})$ si considerino il piano $\alpha_k : x+z=k$ e la retta $r_k : \begin{cases} 2x-y=2 \\ kx+y+(k+2)z=0 \end{cases}$. Si determinino al variare di $k \in \mathbb{C}$ le coordinate dei punti comuni ad r e ad α.

   Risposta: $k=-1\pm\sqrt{3} : r \subset \alpha; k \neq -1\pm\sqrt{3} : r \parallel \alpha, r\cap\alpha = [(-k-2,-2k-4,k+2,0)]$

2. In $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, fissato il riferimento $\Gamma = (O, \mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3))$ si determini una base $\mathcal{T}$ dello spazio di traslazione del piano $\alpha : x+3y+4z-3=0$.

   Risposta: $\mathcal{T} = (-3e_1+e_2, -4e_1+e_3)$

3. In $\widetilde{\mathcal{E}}_2(\mathbb{C})$ si considerino le coniche di equazione $\mathcal{C}_k : 4x^2-y^2-16x+20-k=0$ al variare del parametro k. Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la conica $\mathcal{C}_k$

   (a) è degenere e se ne determinino le rette componenti.

   Risposta: $k=4$: $r_1 : 2x+y-4=0, r_2 : 2x-y-4=0.$

   (b) è generale e se ne determini la natura.

   Risposta: $k \neq 4$: iperbole.

4. In $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$ si determini la distanza del punto $P=(0,1,1)$ dalla retta $r : \begin{cases} x-y=2 \\ z=3 \end{cases}$.

   Risposta: $d = \sqrt{\frac{17}{2}}$

5. Dati il punto $V = [(1,-1,0,0)]$ e la conica $\mathcal{C}$ di equazione $z^2-2y^2-4yz+2x-3=0=y+z-1$,

   (a) Si determini l'equazione cartesiana del luogo Σ delle rette che proiettano $\mathcal{C}$ da V.

   Risposta: $3z^2+2x+2y+2z-7=0$

   (b) Si indichi la natura della quadrica sopra ottenuta e quali sono i suoi eventuali punti doppi.

   Risposta: Cilindro; V: unico punto doppio

   (c) Si trovi, se esiste, un piano α che interseca Σ in una circonferenza, giustificando la risposta in caso negativo.

   Risposta: Non esiste, in quanto Σ non è un cilindro ellittico.

6. In $\widetilde{\mathcal{E}}_3(\mathbb{C})$, data la quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione $x^2+y^2-z^2+2xy-2x=0$,

   (a) si classifichi $\mathcal{Q}$ specificando eventuali punti doppi e la natura dei suoi punti semplici;

   Risposta: Generale; Paraboloide iperbolico

   (b) Si determini, se esiste, un piano α tale che $\mathcal{Q}\cap\alpha$ sia una conica riducibile in due rette reali e distinte.

   Risposta: $\alpha : x_4 = 0.$

UNIVERSITÀ DI BRESCIA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

CHL PTX

Algebra e Geometria - Secondo Test - 22/12/2020

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Ogni studente *deve* svolgere *solamente* la traccia corrispondente all'iniziale del proprio cognome.

Esercizi

1. In $\widetilde{\mathcal{A}_3}(\mathbb{C})$ si considerino il piano $\alpha_k : x+z=k$ e la retta $r_k : \begin{cases} 2x-y=2 \\ kx+y+(k+2)z=0 \end{cases}$. Si determinino al variare di $k \in \mathbb{C}$ le coordinate dei punti comuni ad r e ad α.

   Risposta: $k=-1\pm\sqrt{3} : r \subset \alpha; k \neq -1\pm\sqrt{3} : r \parallel \alpha, r \cap \alpha = [(-k-2, -2k-4, k+2, 0)]$

2. In $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, fissato il riferimento $\Gamma = (O, \mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3))$ si determini una base $\mathcal{T}$ dello spazio di traslazione del piano $\alpha : 3x-4z+1=0$.

   Risposta: $\mathcal{T} = (4e_1+3e_3, e_2)$

3. In $\widetilde{\mathcal{E}_2}(\mathbb{C})$ si considerino le coniche di equazione $\mathcal{C}_k : 4x^2-y^2-16x+20-k=0$ al variare del parametro k. Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la conica $\mathcal{C}_k$

   (a) è degenere e se ne determinino le rette componenti.

   Risposta: $k=4$: $r_1 : 2x+y-4=0, r_2 : 2x-y-4=0.$

   (b) è generale e se ne determini la natura.

   Risposta: $k \neq 4$: iperbole.

4. In $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$ si determini la distanza del punto $P=(0,1,0)$ dalla retta $r : \begin{cases} x+z=3 \\ x=-4 \end{cases}$.

   Risposta: $d=\sqrt{65}$

5. Dati il punto $V=[(0,1,-1,0)]$ e la conica $\mathcal{C}$ di equazione $x^2+2y^2-4xy+2z-3=0=x+y-1$,

   (a) Si determini l'equazione cartesiana del luogo Σ delle rette che proiettano $\mathcal{C}$ da V.

   Risposta: $7x^2-6x+2y+2z-3=0$

   (b) Si indichi la natura della quadrica sopra ottenuta e quali sono i suoi eventuali punti doppi.

   Risposta: Cilindro; V: unico punto doppio

   (c) Si trovi, se esiste, un piano α che interseca Σ in una circonferenza, giustificando la risposta in caso negativo.

   Risposta: Non esiste, in quanto Σ non è un cilindro ellittico.

6. In $\widetilde{\mathcal{E}_3}(\mathbb{C})$, data la quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione $x^2+y^2+2xz-1=0$,

   (a) si classifichi $\mathcal{Q}$ specificando eventuali punti doppi e la natura dei suoi punti semplici;

   Risposta: Generale; Iperboloide iperbolico

   (b) Si determini, se esiste, un piano α tale che $\mathcal{Q} \cap \alpha$ sia una conica riducibile in due rette reali e distinte.

   Risposta: $\alpha : y=1.$

UNIVERSITÀ DI BRESCIA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

DIMQ
UYZ

Algebra e Geometria - Secondo Test - 22/12/2020

Cognome	Nome
Corso di Laurea	Matricola

Ogni studente *deve* svolgere *solamente* la traccia corrispondente all'iniziale del proprio cognome.

Esercizi

1. In $\widetilde{\mathcal{A}_3}(\mathbb{C})$ si considerino il piano $\alpha_k : x + z = k$ e la retta $r_k : \begin{cases} 2x - y = 2 \\ kx + y + (k+2)z = 0 \end{cases}$. Si determinino al variare di $k \in \mathbb{C}$ le coordinate dei punti comuni ad r e ad α.

   Risposta: $k = -1 \pm \sqrt{3} : r \subset \alpha; k \neq -1 \pm \sqrt{3} : r \parallel \alpha, r \cap \alpha = [(-k-2, -2k-4, k+2, 0)]$

2. In $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, fissato il riferimento $\Gamma = (O, \mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3))$ si determini una base $\mathcal{T}$ dello spazio di traslazione del piano $\alpha : 2x + 5z - 2 = 0$.

   Risposta: $\mathcal{T} = (-5e_1 + 2e_3, e_2)$

3. In $\widetilde{\mathcal{E}}_2(\mathbb{C})$ si considerino le coniche di equazione $\mathcal{C}_k : x^2 - y^2 - 2(k-1)xy - 2y - 1 = 0$ al variare del parametro k. Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la conica $\mathcal{C}_k$

   (a) è degenere e se ne determinino le rette componenti.

   Risposta: $k = 1, r_1 : x + y + 1 = 0, r_2 : x - y - 1 = 0$

   (b) è generale e se ne determini la natura.

   Risposta: $k \neq 1$: iperbole.

4. In $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$ si determini la distanza del punto $P = (0, 1, 0)$ dalla retta $r : \begin{cases} x + z = 3 \\ x = -4 \end{cases}$.

   Risposta: $d = \sqrt{65}$

5. Dati il punto $V = [(0, 1, -1, 0)]$ e la conica $\mathcal{C}$ di equazione $x^2 + 2z^2 - 4xz + 2y - 3 = 0 = x + z - 1$,

   (a) Si determini l'equazione cartesiana del luogo Σ delle rette che proiettano $\mathcal{C}$ da V.

   Risposta: $7x^2 - 6x + 2y + 2z - 3 = 0$

   (b) Si indichi la natura della quadrica sopra ottenuta e quali sono i suoi eventuali punti doppi.

   Risposta: Cilindro; V: unico punto doppio

   (c) Si trovi, se esiste, un piano α che interseca Σ in una circonferenza, giustificando la risposta in caso negativo.

   Risposta: Non esiste, in quanto Σ non è un cilindro ellittico.

6. In $\widetilde{\mathcal{E}}_3(\mathbb{C})$, data la quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione $x^2 - y^2 + z^2 + 2xz - 2x = 0$,

   (a) si classifichi $\mathcal{Q}$ specificando eventuali punti doppi e la natura dei suoi punti semplici;

   Risposta: Generale; Paraboloide iperbolico

   (b) Si determini, se esiste, un piano α tale che $\mathcal{Q} \cap \alpha$ sia una conica riducibile in due rette reali e distinte.

   Risposta: $\alpha : x_4 = 0$.