UNIVERSITÀ DI BRESCIA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

Algebra e Geometria - Primo Test - 03/11/2020

Modalità di Esame

1. Ogni studente deve svolgere *esclusivamente* la traccia corrispondente alle iniziali del proprio cognome.

2. Il tempo a disposizione per lo svolgimento del compito è di 1 ora.

3. È permesso l'uso di libri, appunti e/o calcolatrici.

4. Durante l'esame gli studenti dovranno rimanere collegati alla sessione di *microsoft teams* approntata a tale fine.

5. Al termine dell'esame ogni studente dovrà inviare agli indirizzi di posta elettronica `luca.giuzzi@unibs.it` e `silvia.pellegrini@unibs.it` una mail dall'oggetto *Consegna compito studente NOME COGNOME* e contenente in allegato una immagine (in formato jpeg o pdf) del foglio con le risposte alle domande della traccia.

6. Il foglio di risposta al compito deve contenere come prima riga *Nome* e *Cognome* dello studente e deve riportare le sole risposte ai quesiti (non i calcoli corrispondenti).

UNIVERSITÀ DI BRESCIA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

ABC MNO

Algebra e Geometria - Primo Test - 03/11/2020

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Ogni studente *deve* svolgere *solamente* la traccia corrispondente all'iniziale del proprio cognome.

Esercizi

1. Si considerino le matrici

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 & k^2 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

   (a) Si determinino, se esistono, i valori di k per i quali il vettore ${}^tX = (k, 2, -2, k)$ è autosoluzione del sistema lineare $A_kX = \mathbf{0}$.

   Risposta: $k = 1$

   (b) Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$ le dimensioni dello spazio S_k delle soluzioni di $A_kX = \mathbf{0}$.

   Risposta: $k = 1, 2 : \dim(S_k) = 2; k \neq 1, 2 : \dim(S_k) = 1$

   (c) Posto $k = 2$ si determini una base dello spazio S_0 delle soluzioni di $A_2X = \mathbf{0}$.

   Risposta: $\big((-2, 0, 0, 1), (1, 0, -1, 0)\big)$

2. In $\mathbb{R}^{3,3}$ si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2k & 2k \\ -1 & 2k & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino i valori di k per cui A_k è ortogonalmente diagonalizzabile.

   Risposta: $\forall k \in \mathbb{R}$

   (b) Posto $k = 0$ si determinino, se esistono, una matrice ortogonale P che diagonalizza A_0 e la relativa matrice diagonale D.

   Risposta: $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

   (c) Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ è autovettore di A_k e, in tali casi, il relativo autovalore λ.

   Risposta: $k = 0, \lambda = 0$

3. In $\mathbb{R}^3$ si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $v = \big(2-k, 0, k\big)$ appartiene alla copertura lineare di $\mathcal{S} = \big\{(1, -1, 0), (k, 2, 0)\big\}$.

   Risposta: $k = 0$

4. Si determini una base di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ rispetto la quale il vettore $(4, -2, 0, 5)$ ha componenti $(2, 0, 0, 0)$.

   Risposta: $\left(\frac{1}{2}(4, -2, 0, 5), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\right)$

5. Si determini in $\mathbb{R}^4$ una base di un complemento diretto di $W = \mathcal{L}(A)$ ove $A = \big\{(-1, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 1)\big\}$.

   Risposta: $(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)$

6. Siano U e W sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^{6,6}$. Supposto $\dim(U) = 28$ e $\dim(W) = 12$ si determinino la minima e la massima dimensione possibili di $U \cap W$.

   Risposta: $4 \leq \dim(U \cap V) \leq 12$

UNIVERSITÀ DI BRESCIA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

DEF
PQR

Algebra e Geometria - Primo Test - 03/11/2020

Cognome	Nome
Corso di Laurea	Matricola

Ogni studente *deve* svolgere *solamente* la traccia corrispondente all'iniziale del proprio cognome.

Esercizi

1. Si considerino le matrici
$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ k & 1 & 2 & k^2 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

   (a) Si determinino, se esistono, i valori di k per i quali il vettore ${}^tX = (k, 2, -2, k)$ è autosoluzione del sistema lineare $A_k X = \mathbf{0}$.

   Risposta: $k = 1$

   (b) Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$ le dimensioni dello spazio S_k delle soluzioni di $A_k X = \mathbf{0}$.

   Risposta: $k = 1, 2 : \dim(S_k) = 2; k \neq 1, 2 : \dim(S_k) = 1$

   (c) Posto $k = 2$ si determini una base dello spazio S_0 delle soluzioni di $A_2 X = \mathbf{0}$.

   Risposta: $\big((-2, 0, 0, 1), (1, 0, -1, 0)\big)$

2. In $\mathbb{R}^{3,3}$ si consideri la matrice
$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2k & -1 \\ 2k & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino i valori di k per cui A_k è ortogonalmente diagonalizzabile.

   Risposta: $\forall k \in \mathbb{R}$

   (b) Posto $k = 0$ si determinino, se esistono, una matrice ortogonale P che diagonalizza A_0 e la relativa matrice diagonale D.

   Risposta: $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

   (c) Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ è autovettore di A_k e, in tali casi, il relativo autovalore λ.

   Risposta: $k = 0, \lambda = 0$

3. In $\mathbb{R}^3$ si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $v = (0, 2-k, k)$ appartiene alla copertura lineare di $\mathcal{S} = \{(-1, 1, 0), (2, k, 0)\}$.

   Risposta: $k = 0$

4. Si determini una base di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ rispetto la quale il vettore $(6, -1, 1, 4)$ ha componenti $(0, 4, 0, 0)$.

   Risposta: $\big((1, 0, 0, 0), \frac{1}{4}(6, -1, 1, 4), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\big)$

5. Si determini in $\mathbb{R}^4$ una base di un complemento diretto di $W = \mathcal{L}(A)$ ove $A = \{(0, 2, -1, 0), (1, -1, 0, 0)\}$.

   Risposta: $(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1)$

6. Siano U e W sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^{5,5}$. Supposto $\dim(U) = 13$ e $\dim(W) = 15$ si determinino la minima e la massima dimensione possibili di $U \cap W$.

   Risposta: $3 \leq \dim(U \cap V) \leq 13$

UNIVERSITÀ DI BRESCIA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

Algebra e Geometria - Primo Test - 03/11/2020

GHI
STU

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Ogni studente *deve* svolgere *solamente* la traccia corrispondente all'iniziale del proprio cognome.

Esercizi

1. Si considerino le matrici
$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 4 \\ k & 1 & 2 & k^2 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$
   (a) Si determinino, se esistono, i valori di k per i quali il vettore ${}^tX = (k, 2, -2, k)$ è autosoluzione del sistema lineare $A_kX = \mathbf{0}$.

   Risposta: $k = 1$

   (b) Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$ le dimensioni dello spazio S_k delle soluzioni di $A_kX = \mathbf{0}$.

   Risposta: $k = 1, 2 : \dim(S_k) = 2; k \neq 1, 2 : \dim(S_k) = 1$

   (c) Posto $k = 2$ si determini una base dello spazio S_0 delle soluzioni di $A_2X = \mathbf{0}$.

   Risposta: $\big((-2, 0, 0, 1), (1, 0, -1, 0)\big)$

2. In $\mathbb{R}^{3,3}$ si consideri la matrice
$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ k & k & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino i valori di k per cui A_k è ortogonalmente diagonalizzabile.

   Risposta: $\forall k \in \mathbb{R}$

   (b) Posto $k = 0$ si determinino, se esistono, una matrice ortogonale P che diagonalizza A_0 e la relativa matrice diagonale D.

   Risposta: $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

   (c) Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ è autovettore di A_k e, in tali casi, il relativo autovalore λ.

   Risposta: $k = 0, \lambda = 0$

3. In $\mathbb{R}^3$ si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $v = \big(2-k, 0, k\big)$ appartiene alla copertura lineare di $\mathcal{S} = \big\{(1, k+1, 0), (-1, 1, 0)\big\}$.

   Risposta: $k = 0$

4. Si determini una base di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ rispetto la quale il vettore $\big(-1, 2, 3, 5\big)$ ha componenti $\big(0, 0, 7, 0\big)$.

   Risposta: $\big((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), \frac{1}{7}(-1, 2, 3, 5), (0, 0, 1, 0)\big)$

5. Si determini in $\mathbb{R}^4$ una base di un complemento diretto di $W = \mathcal{L}(A)$ ove $A = \big\{(1, 0, 0, 1), (0, 2, 0, 3)\big\}$.

   Risposta: $(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)$

6. Siano U e W sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^{7,4}$. Supposto $\dim(U) = 14$ e $\dim(W) = 15$ si determinino la minima e la massima dimensione possibili di $U \cap W$.

   Risposta: $1 \leq \dim(U \cap V) \leq 14$

UNIVERSITÀ DI BRESCIA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

JKLV WXYZ

Algebra e Geometria - Primo Test - 03/11/2020

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

Ogni studente *deve* svolgere *solamente* la traccia corrispondente all'iniziale del proprio cognome.

Esercizi

1. Si considerino le matrici

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & k-1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 2 & k^2 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

   (a) Si determinino, se esistono, i valori di k per i quali il vettore ${}^tX = (k, 2, -2, k)$ è autosoluzione del sistema lineare $A_kX = \mathbf{0}$.

   Risposta: $k = 1$

   (b) Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$ le dimensioni dello spazio S_k delle soluzioni di $A_kX = \mathbf{0}$.

   Risposta: $k = 1, 2 : \dim(S_k) = 2; k \neq 1, 2 : \dim(S_k) = 1$

   (c) Posto $k = 2$ si determini una base dello spazio S_0 delle soluzioni di $A_2X = \mathbf{0}$.

   Risposta: $\big((-2, 0, 0, 1), (1, 0, -1, 0)\big)$

2. In $\mathbb{R}^{3,3}$ si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & k \\ -1 & k & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino i valori di k per cui A_k è ortogonalmente diagonalizzabile.

   Risposta: $\forall k \in \mathbb{R}$

   (b) Posto $k = 0$ si determinino, se esistono, una matrice ortogonale P che diagonalizza A_0 e la relativa matrice diagonale D.

   Risposta: $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

   (c) Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ è autovettore di A_k e, in tali casi, il relativo autovalore λ.

   Risposta: $k = 0, \lambda = 0$

3. In $\mathbb{R}^3$ si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $v = (0, 2-k, k)$ appartiene alla copertura lineare di $\mathcal{S} = \big\{(2, k, 0), (1, k+1, 0)\big\}$.

   Risposta: $k = 0$

4. Si determini una base di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ rispetto la quale il vettore $(2, 1, 0, 3)$ ha componenti $(0, 0, 0, 4)$.

   Risposta: $\big((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), \frac{1}{4}(2, 1, 0, 3)\big)$

5. Si determini in $\mathbb{R}^4$ una base di un complemento diretto di $W = \mathcal{L}(A)$ ove $A = \big\{(0, -1, 0, 1), (0, 1, 0, 0)\big\}$.

   Risposta: $(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)$

6. Siano U e W sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^{4,4}$. Supposto $\dim(U) = 10$ e $\dim(W) = 8$ si determinino la minima e la massima dimensione possibili di $U \cap W$.

   Risposta: $2 \leq \dim(U \cap V) \leq 8$