Coniche

↓

Def Curva algebrica reale piana del II ordine

→ $\cancel{{}^tXAX=0 \quad X=}$

$$X A {}^t X = 0 \quad \text{con } X = (x_1\ x_2\ x_3)$$
$$A = {}^t A$$

ad una Conica è associato un prodotto scalare

in $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$.

OSS un punto $P \in \mathcal{C} \iff X = [(x_1'\ x_2'\ x_3')]$

coordinate di P

Si ha

$$X A^{t} X = 0 \quad \text{cioé}$$

$$b(X, X) = 0 \quad \text{cioé}$$

$$X \in X^{\perp}$$

Un punto P appartiene a $\mathcal{C} \iff$ P é isotropo per la forma bilineare simmetrica indotta dalla matrice di $\mathcal{C}$.

__Def:__ Sia P un punto di $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ si dice polare di P la retta

$$p = P^{\perp_{\mathcal{C}}}$$

in particolare se $P = [(a_1, a_2, a_3)]$

allora $p^\perp$ ha equazione

$$(x_1\ x_2\ x_3)\, A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0$$

se $A^t P \neq 0$ la polare è una retta.

viceversa se p è una retta rappresentata da un sott. vettoriale di $\mathbb{R}^3$ di dim. $=2$.

si dice polo di p il punto $P = p^{\perp e}$.

<u>Teorema</u>: Principio di reciprocità.

Siano P e Q due punti di $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$.

Allora $P \in Q^{\perp e} \iff Q \in P^{\perp e}$

[in altre parole, la polare di Q passa per $P \iff$ la polare di P passa per Q].

Il polo di una retta r appartiene ad una retta $s \iff$ il polo di s appartiene ad r.

$r^{\perp e} \in s \iff s^{\perp e} \in r$

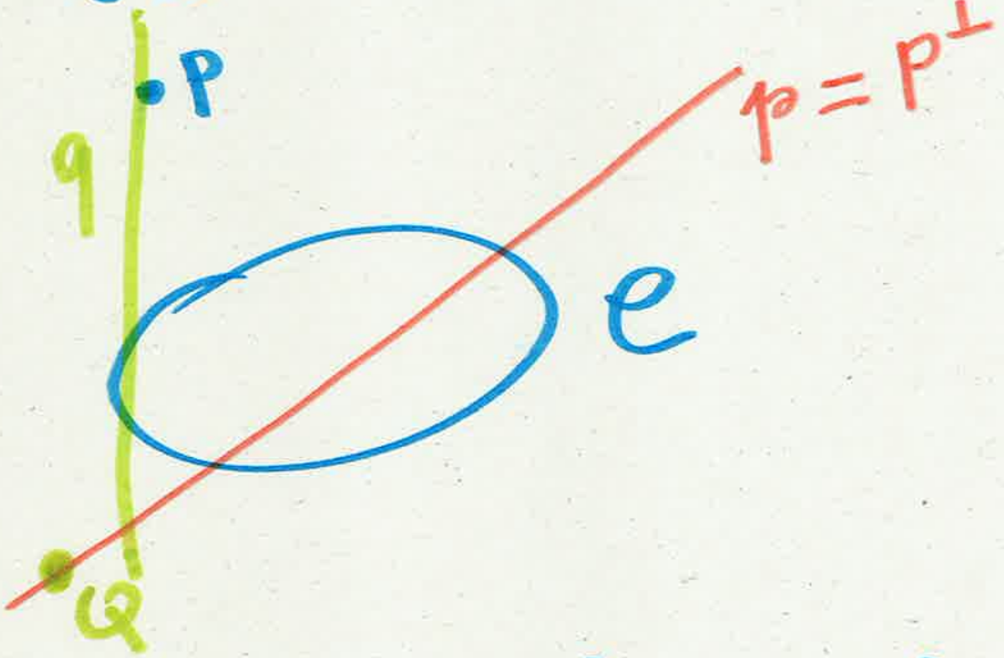
DIM: $P \in Q^{\perp e} \iff P$ e Q sono coniugati rispetto a $\mathcal{C}$ cioè $b(P,Q)=0$

bé simm. $\iff b(Q,P)=0 \iff Q \in P^{\perp e}$.

Dal punto di vista delle rette.

r, s due rette.

$$r^{\perp_e} \in s \iff s^{\perp_e} \in r^{\perp_e \perp_e} = r \qquad \square$$



La relazione di polarità scambia punti e rette.

Che cosa sono geometricamente le polari?

1) $P \in P^{\perp e} \iff P \in \mathcal{C}$.

Equazione delle rette tangenti ad $XA\,{}^tX = 0$ per un punto.

$$\begin{cases} \mathcal{C} & XA\,{}^tX = 0 \\ r & X = \lambda X' + \mu X'' \end{cases} \to \text{generica retta per 2 punti}$$

vediamo quando la generica retta r é tangente.

$$(\lambda X' + \mu X'')\, A\, {}^t(\lambda X' + \mu X'') = 0$$

eq. omogenea di II grado in λ e μ

$$\lambda^2 X' A\, {}^tX' + \mu^2 X'' A\, {}^tX'' + \lambda\mu X' A\, {}^tX'' + \mu\lambda X'' A\, {}^tX' = 0$$

$$\lambda^2 X' A\, {}^tX' + 2\lambda\mu X' A\, {}^tX'' + \mu^2 X'' A\, {}^tX'' = 0$$

questa eq. rappresenta una rg.

$\iff$ il suo discrim. é $= 0$.

$\iff \frac{\Delta}{4} = 0$ cioè

~~Sapp~~ $0 = (X'A^tX'')^2 - (X'A^tX')(X''A^tX'')$

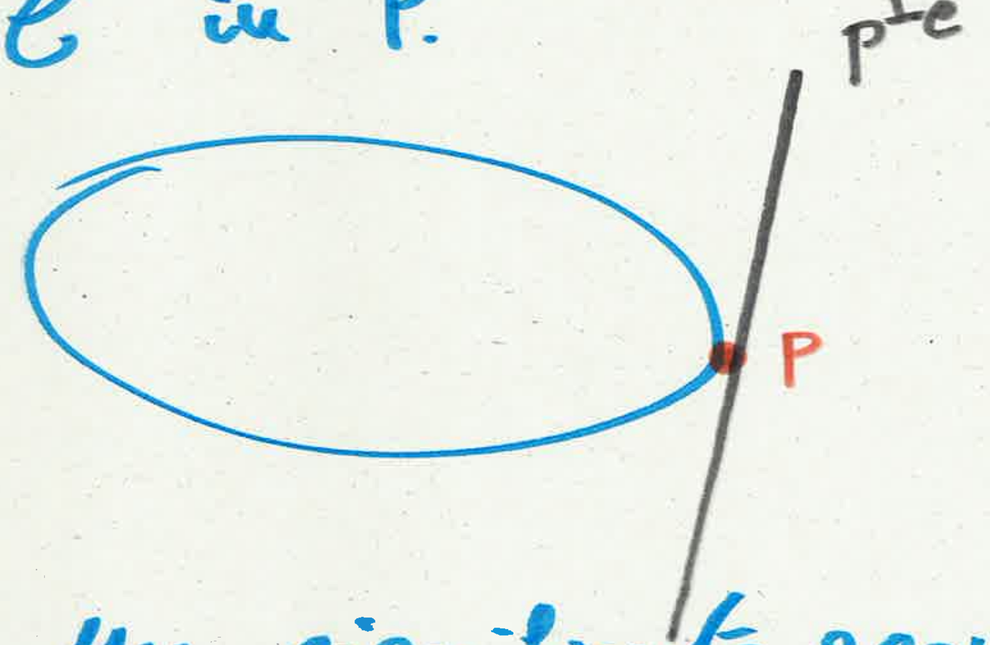
$\downarrow$

vero $\iff (X'A^tX'')^2 - (X'A^tX')\underbrace{(X''A^tX'')}_{=0}$

supponiamo X'' coordinate di un punto di $\mathcal{C} \Rightarrow X''A^tX'' = 0$

$\Rightarrow \boxed{X'A^tX'' = 0}$ è l'eq. delle tang. per X'' perché X' sono le coor. di un qualsiasi punto sulla tg. in X''

In altre parole: se P (di coord. X'') è un punto di $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$ $P^{\perp_{\mathcal{C}}}$ è la retta tangente a $\mathcal{C}$ in P.



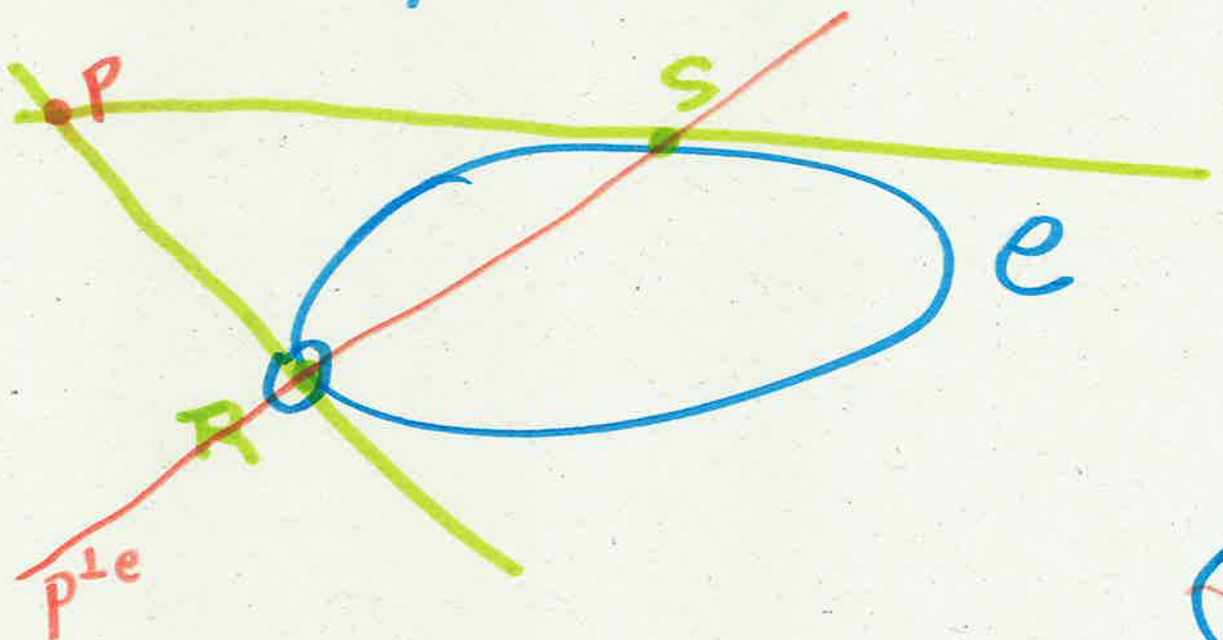
La polare ha un significato geometrico per i punti su $\mathcal{C}$.

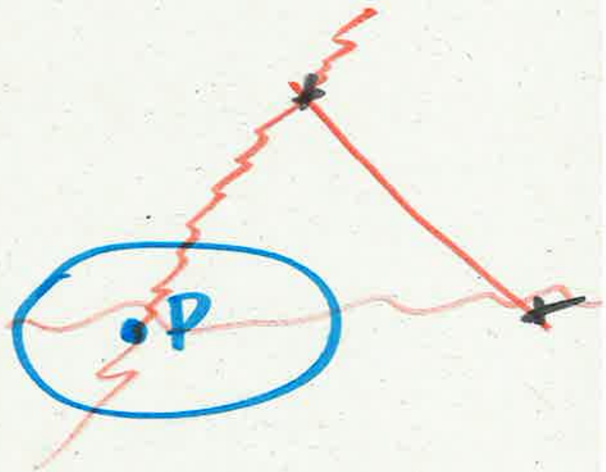
→ <u>N.B</u> La formula $X A^t P = 0$ per la rtg in P alla conica è anche introdotta come "formula di sdoppiamento" della conica.]

Che cosa è la polare di un punto $P \notin \mathcal{C}$.

<u>Teorema</u>: Sia $P \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ un punto e supponiamo $P \notin \mathcal{C}$. Allora $P^{\perp_{\mathcal{C}}} \cap \mathcal{C} = \{R, S\}$ con $R \neq S$ e le rette PR e PS sono rispettivamente le tangenti a $\mathcal{C}$ per P.

N.B: $\{R, S\}$ possono essere punti reali o punti "immaginari coniugati". → nel primo caso si dice che P è esterno alla conica; nel secondo che è interno.





Sia $P \notin \mathcal{C}$ e siano R, S i due punti di intersezione con $\mathcal{C}$ della retta $P^{\perp_{\mathcal{C}}}$

Allora la polare di R ~~per~~ è la retta tangente a $\mathcal{C}$ in R

$\Rightarrow$ poiché $R \in P^{\perp_{\mathcal{C}}}$ si ha $P \in R^{\perp_{\mathcal{C}}}$

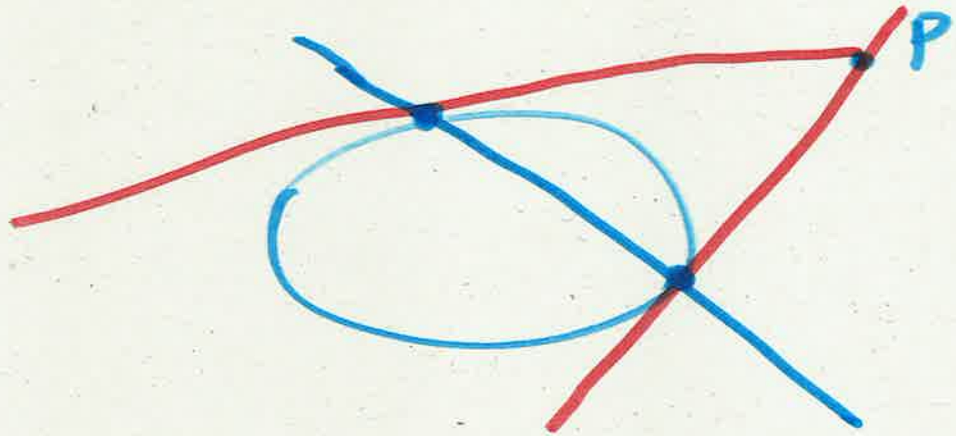
$\Rightarrow$ P appartiene alla tg in R a $\mathcal{C}$.

Similmente per S.

$$P \in R^{\perp_{\mathcal{C}}} \cap S^{\perp_{\mathcal{C}}}$$

ma la tg. in R a $\mathcal{C}$ non passa per S e la tg in S a $\mathcal{C}$ non passa per R

$\Rightarrow R^{\perp e} \neq S^{\perp e} \Rightarrow R^{\perp e} \cap S^{\perp e} = \{P\}$. perché 2 rette distinte hanno sempre esattamente un punto in comune. $\square$



CLASSIFICAZIONE DELLE CONICHE.

- PROIETTIVA $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$
- AFFINE

Conica é → GENERALE se PRIVA DI PUNTI DOPPI

$\Updownarrow$

E IRRIDUCIBILE

cioé $\det(A) \neq 0$

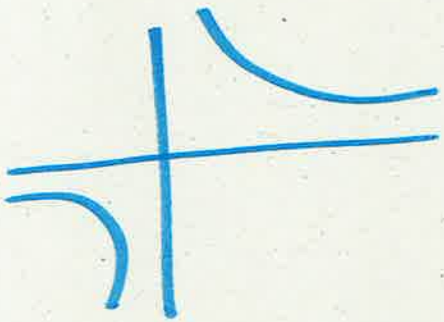
→ ~~[illegible]~~
singolare se ha almeno un punto doppio

$\Updownarrow$

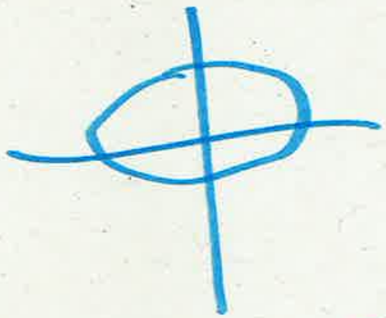
é riducibile
- 2 rette distinte * se $rk(A) = 2$
- 1 retta contata 2 volte se $rk(A) = 1$

*
- reali e distinte → ∞^1 pti
- imm. e coniugate → 1 punto reale.

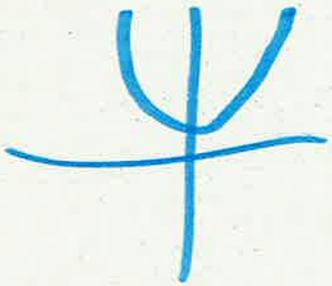
$rk(A)$	
3	GENERALE / IRRIDUCIBILE
2	RIDUCIBILE IN 2 RETTE < REALI E DIST. / IMM. CONIUGATE
1	UNA RETTA REALE CONTATA 2 VOLTE.



IPERBOLE



ELLISSE



PARABOLA

CLASSIFICAZIONE AFFINE $A_2(\mathbb{R})$

↓

studiamo i punti di $\widetilde{A_2(\mathbb{R})}$ che <u>non</u> <u>sono</u> in $A_2(\mathbb{R})$

<u>Def</u>: Una conica generale è detta

- IPERBOLE: se interseca A_∞ in 2 punti reali e distinti

- ELLISSE: se interseca A_∞ in 2 punti immaginari e coniugati.

- PARABOLA: se interseca A_∞ in 1 punto reale contato 2 volte.

ALGEBRICAMENTE:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} X A {}^t X = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

STUDIAMO LE SOL. DELL' eq. di II grado.

$$\frac{\Delta}{4} = a_{12}^2 - a_{11} a_{22} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Se $\det(A^*) = 0 \Rightarrow \mathcal{C}$ é una parabola

$\det(A^*) < 0 \Rightarrow \mathcal{C}$ é una iperbole.

$\det(A^*) > 0 \Rightarrow \mathcal{C}$ é una ellisse.

Quando $\mathcal{C}$ é una <u>circonferenza</u>?

$$J_\infty \text{ e } \overline{J_\infty}$$

$\Rightarrow \mathcal{C}$ é una ellisse.

$$a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 = 0$$

abbia soluzioni $(1, i, 0)$
$(1, -i, 0)$

$$a_{11} + 2a_{12} i - a_{22} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} a_{12} = 0 \\ a_{11} = a_{22} \end{array}$$

Def: Sia $\mathcal{C}$ una conica generale.
Si dice CENTRO di $\mathcal{C}$ il polo rispetto a $\mathcal{C}$ della retta impropria.
Una conica é detta <u>a centro</u> se il suo centro é un punto proprio.

<u>OSS</u>: ellissi ed iperboli sono coniche a centro (perché il polo della retta impropria non appartiene alla retta impropria ⇒ é proprio).
<u>le parabole no.</u>

OSS II: il centro di una circonferenza è il suo centro nel senso che noi abbiamo visto.

⇒ se si considerano le tangenti per i punti ciclici alla circonferenza queste passano per il centro "geometrico" ⇒

⇒ le polari dei punti ciclici si intersecano nel centro "geometrico"

⇒ la polare del centro è $J_\infty \bar{J}_\infty = A_\infty$

⇒ il polo di A_∞ è il centro geom.

Proprietà metriche.

Def: Si dice <u>asintoto</u> di una conica ogni sua tangente propria in un punto improprio.

→ le parabole NON HANNO ASINTOTI

→ le iperboli hanno 2 asintoti reali (e distinti).

→ una iperbole è detta equilatera se i suoi asintoti sono ortogonali fra loro.

→ le ellissi HANNO 2 ASINTOTI IMMAGINARI E CONIUGATI.

OSS: Gli asintoti di una conica sono le rette che congiungono il suo centro con i suoi punti impropri.

$\mathcal{C}$: circonferenza di centro (x_0, y_0)

$$C\, J_\infty \quad e \quad C\, \bar{J}_\infty$$

$$(x - x_0) = i\,(y - y_0)$$
$$(x - x_0) = -i\,(y - y_0)$$

Def: Si dice <u>diametro</u> di una conica la polare di un ~~...~~ punto improprio.

oss

1) gli asintoti sono diametri
2) i diametri formano un fascio di rette per il centro della conica.

Def: Si dice **asse** di una conica un suo diametro (= polare di un punto improprio) **ortogonale** al proprio polo.

↓ prod. scalare euclideo.

Teorema: Una parabola ha un solo asse. Le coniche a centro hanno 2 assi e questi sono ortogonali fra loro.

Def: Si chiamano vertici le intersezioni di una conica con i suoi assi.

DIM

1) Sia $\mathcal{C}$ una parabola
I suoi diametri sono tutte rette parallele (perché passano per il centro di $\mathcal{C}$ e questo è un punto improprio).

$$(1 \quad X \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

[illegible]

cerchiamo l'asse di una parabola.

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + k\,x_3 = 0$ deve essere

ortogonale al suo polo ~~che~~ è

~~necessario~~

→ DIREZIONE DELLA RETTA

$(-a_{12} \quad a_{11})$

→ pto improprio $[(-a_{12} \quad a_{11} \quad 0)]$

punto ortogonale → $[(a_{11} \quad a_{12} \quad 0)]$

$l \cdot (-a_{12}) + m \cdot a_{11} = 0$

ASSE DELLA PARABOLA = retta polare di $[(a_{11} \quad a_{12})]$

$$(a_{11}\ a_{12}\ 0)\,A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$$

ASSE DELLA PARABOLA →

$$\Big[\ a_{11}(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3)+a_{12}(a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3)=0$$

---

coniche a centro.

Equazione del centro.

$$(l \;\; m \;\; 0)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$ eq. dei diametri
$(l, m) \neq (0\;0)$.

$$l\,(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + m\,(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) = 0$$

↗
eq. fascio diametri.

Se $\mathcal{C}$ parabola $\Rightarrow$ i diametri sono tutti paralleli

$\Rightarrow$ sono della forma

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + k\,x_3 = 0 \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$(\ell a_{11} + m a_{12})\, x_1 + (\ell a_{12} + m a_{22})\, x_2 + \dots = 0$$

$\uparrow$

eq. dei diametri

pto. improprio é

$$[(-\ell a_{12} - m a_{22}) \quad (\ell a_{11} + m a_{12}) \quad 0]$$

deve essere ortogonale a $[(\ell \;\; m \;\; 0)]$

$$\ell(-\ell a_{12} - m a_{22}) + m(\ell a_{11} + m a_{12}) = 0$$

$$-\ell^2 a_{12} + m^2 a_{12} + m\ell(a_{11} - a_{22}) = 0$$

$$m^2 a_{12} + m\ell(a_{11} - a_{22}) - \ell^2 a_{12} = 0$$

$\uparrow$

DISTINGUIAMO 2 casi.

Se $\mathcal{C}$ è una circonf.

$\Rightarrow a_{11} = a_{22}$; $a_{12} = 0$ $\Rightarrow$ ogni

diametro è un asse !

ALTRIMENTI RISOLVIAMO COME EQ. DI II grado osservando che

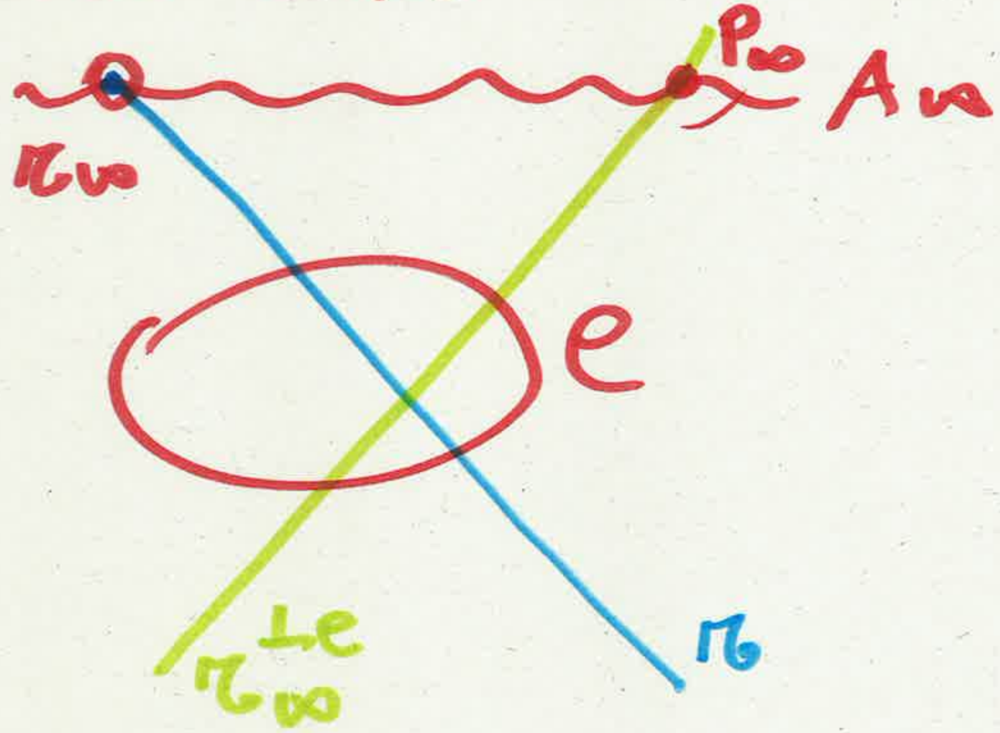
$$\Delta = (a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}^2 > 0$$

quindi ci sono 2 soluzioni

$\Rightarrow$ gli assi sono 2.

In particolare si vede che le sol. danno 2 rette ortogonali fra loro. $\square$

DIM GEOMETRICA CHE GLI ASSI SONO ORTOGONALI FRA LORO



P_∞ polo di r $\quad$ r_∞ punto imp.

$P_\infty \perp r_\infty$ ma poiché P_∞ é polo di r e $r_\infty \in r \Rightarrow$ la polare di r_∞ passa per P_∞. ma allora il polo di $r_\infty^{\perp e}$ é ort.

le intersezioni delle rette tg a $\mathcal{C}$ condotte per J_∞ e $\bar{J}_\infty$.
Si dicono <u>direttrici</u> di $\mathcal{C}$ le rette polari dei fuochi di $\mathcal{C}$.

<u>Esercizio</u> (che non facciamo).
Verificare che 1) gli assi sono assi di simmetria per una conica.
2) che con le def. date di direttrice e fuochi parabole/ellissi e iperboli soddisfano le nozioni del elementari;

al suo punto improprio P_∞ perché il suo polo è r_∞ $\Rightarrow$ $r_{G_\infty}^{\perp}$ è un asse di $\mathcal{C}$ ed è ortogonale all'asse r_{G_∞}.

$\Rightarrow$ Quando gli assi sono 2 essi sono ortogonali fra loro

---

<u>Def</u>: Siano J_∞ e $\bar{J}_\infty$ i due punti ciclici del piano e $\mathcal{C}$ una conica.
Si dicono <u>FUOCHI</u> DI $\mathcal{C}$

come luoghi geometrici.

Forme canoniche per le coniche

[Cerchiamo riferimenti affini (o euclidei) in cui le equazioni delle coniche sono particolarmente semplici.]

→ se la conica è a centro.

scegliamo come origine del riferimento il centro della conica e come versori del rif. due versori paralleli a 2 assi ortogonali.

1) CIRCONFERENZA

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{11} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} a_{11} = a_{22} \\ a_{12} = 0 \end{array}$$

$C = (0,0) \qquad [(0\ 0\ 1)]$

ma C è polo di A_∞ $\Leftrightarrow$ $a_{13} = a_{23} = 0$

$$\Rightarrow a_{11} x_1^2 + a_{11} x_2^2 + a_{33} x_3^2 = 0$$

$$\downarrow$$

in coord. affini $\quad x^2 + y^2 = r^2 \qquad r^2 = -\dfrac{a_{33}}{a_{11}}$

1) ellisse/iperbole.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

gli assi sono le rette

$x=0$ ed $y=0$

perché si intersecano in $(0,0)$

che é il centro e corr. proprio

alle direzioni coordinate

Il fatto di avere come polo di A^i_∞ $(0,0)$

implica $a_{13} = a_{23} = 0$

l'eq. degli assi è

$$\cancel{a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2}$$

$$a_{12}x_1^2 + (a_{22} - a_{11})x_1x_2 - a_{12}x_2^2 = 0$$

e le sol. devono essere

$$[(1\ 0\ 0)] \text{ e } [(0\ 1\ 0)]$$

DA cui $a_{12} = 0$.

⇒ La matrice é del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \boxed{0} & 0 \\ \boxed{0} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

il centro é $(0,0)$

gli assi sono di punti impropri $[(1\,0\,0)]$ e $[(0\,1\,0)]$

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0$$

PASSANDO A COORD. NON OMOGENEE

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$$

posto $\dfrac{a_{11}}{a_{33}} = \dfrac{1}{-a}$ $\quad \dfrac{a_{22}}{a_{33}} = \dfrac{1}{-b}$

DIVENTANO

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$$

con $(a, b) > 0$

$a\ b > 0$
se si ha una
ellisse

$ab < 0$
se si ha
una iperbole.

CONICA A CENTRO GENERALE A

$\downarrow$

scelgo un rif. opportuno.

A' nuova matrice
e eq. del tipo $\boxed{\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1}$

Tutte le prop. geometriche che mi interessano.

le posso studiare ragionando su questa eq. semplice.

Ad es. la sostituzione

$$x \mapsto -x$$

o $y \to -y$ in questa eq

non cambia la curva.

$\Rightarrow$ gli assi sono assi di simmetria.

$\rightarrow$ COORD. DEI FUOCHI ed. eq. delle direttrici.
valgono le prop. metriche.

CONICHE NON A CENTRO

(parabola).

<u>Pb.</u> abbiamo solo <u>un asse</u>
e il centro é un
pto. improprio.

<u>Teorema</u>: Sia $\mathcal{C}$ una conica e V un suo vertice $\Rightarrow$ la tangente in V a $\mathcal{C}$ é ortogonale all'asse passante per V.

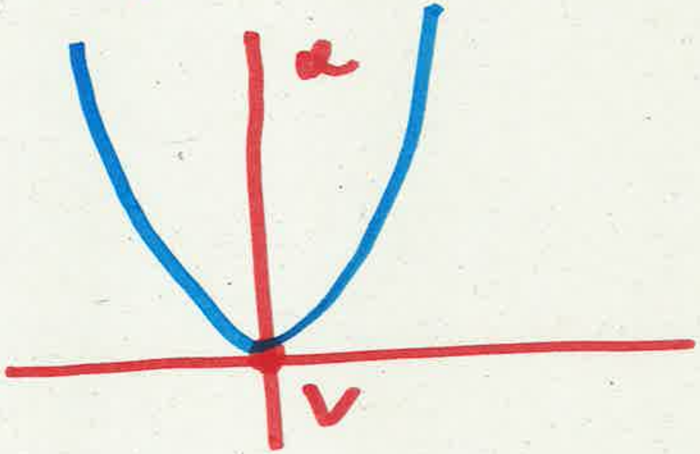
DIM: Sia a l'asse passante per V e t la tangente in V a $\mathcal{C}$.

per il principio di reciprocità la polare di V passa per il polo di a. Ma la polare di V è la tangente in V a $\mathcal{C}$ ed il polo di a è ortogonale ad a $\Rightarrow t \perp a$. $\square$

Forma canonica di una parabola.

→ ORIGINE il vertice $V = (0\ 0)$.

→ Versori → versori paralleli all'asse ed alla tangente in V a $\mathcal{C}$.



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

conica $\rightarrow$ tangente A_∞ in $[(0 1 0)]$
passante per $[(0 0 1)]$
con tg in $[(0 0 1)]$ retta con
punto improprio $[(1 0 0)]$

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

tg. $\rightarrow a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$

passaggio per $[(0 1 0)]$ $\rightarrow a_{22} = 0 \Rightarrow a_{12} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

inoltre $\mathcal{C}$ passa per $[(0\ 0\ 1)]$

$$\Rightarrow \quad a_{33} = 0 \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

calcolo la polare di $(0\ 0\ 1)$

$$(x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x_1 \ x_2 \ x_3)\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{13}x + a_{23}y = 0$$

ma questa retta deve essere proprio l'asse delle x cioè

$$y = 0$$

$$\Rightarrow a_{13} = 0.$$

DA cui $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{23} & 0 \end{pmatrix}$ é la matrice che sto cercando.

l'eq corrispondente affine è

$$a_{11} x^2 + 2 a_{23} y = 0$$

cioè dividendo per $-a_{23}$ e riarrangiando

$$\boxed{y = \alpha x^2}$$

con $\alpha = -\dfrac{a_{11}}{2 a_{23}}$