

Teoria dei Sistemi Lineari

→ DISCUSSIONE

→ RISOLUZIONE → visto che le soluzioni di

$AX=B$ si possono vedere

nella forma $X = \bar{X} + Z$

ove Z è una qualsiasi
soluzione di $AZ = \underline{0}$

Abbiamo dimostrato che l'insieme delle soluzioni di
un sistema lineare omogeneo è un sottospazio vettoriale

di $\mathbb{K}^n \rightarrow$ 1) che l'insieme delle soluzioni di una
equazione lineare omogenea
è un sottospazio vettoriale

2) che l'intersezione di sottospazi è un sottospazio.

N.B. : S risulta di un x e solo se

$S =$ insieme delle soluzioni di $AX=B$
è sottospazio $\Leftrightarrow B=\underline{0}$

$B=\underline{0} \Rightarrow S$ sottospazio (menzionato sopra)

Supponiamo $B \neq \underline{0} \Rightarrow \tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è soluzione di

$AX=B \Rightarrow \underline{0} \notin S \Rightarrow S$ non è sottospazio.

In generale se X e Y hanno una proprietà e $X \cap Y \neq \emptyset$
è molto probabile che $X \cap Y$ abbia la stessa proprietà

Nel caso dell'unione questo non è vero.

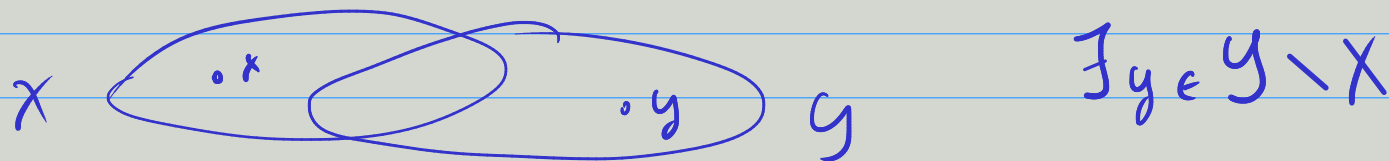
Osservazione: siano X, Y due sottospazi vettoriali di $V(K) \Rightarrow X \cup Y$ è sottospazio di $V(K)$ se e solo se $X \subseteq Y$ oppure $Y \subseteq X$.

In altre parole $X \cup Y$ è sottospazio vettoriale

$$\Leftrightarrow \underline{X \cup Y = X} \text{ oppure } \underline{X \cup Y = Y}$$

Dim.

Supponiamo $X \cup Y \neq X, Y \Rightarrow \exists x \in X \setminus Y$

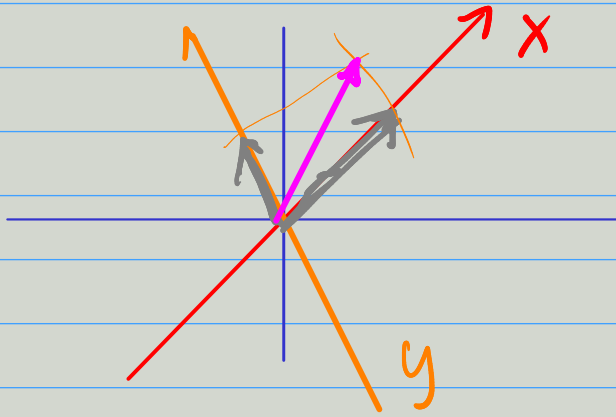


Se $X \cup Y$ fosse s. vettoriale $\Rightarrow x + y \in X \cup Y$
 $\Rightarrow x + y \in \cancel{X}$ oppure $x + y \in Y$.

Supponiamo $x+y \in X \Rightarrow (x+y)-x \in X \Rightarrow y \in X$ $\downarrow$
 $x \in X$ " y

analogamente se fosse $x+y \in Y$ $\downarrow$

In particolare $X \cup Y$ non è sottospazio vett. $\square$



Cosa fare? L'idea è di studiare
 $\mathcal{L}(X \cup Y)$

Se $X \cup Y$ non è sottospazio vettoriale
cosa è il più piccolo sottospazio che
contiene $X \cup Y$?

$$X \cap Y \subseteq X \cup Y \subseteq L(X \cup Y)$$

Def: Siano $X, Y \subseteq V(K)$. Si dice somma di X e Y l'insieme $X+Y := \{x+y \mid x \in X, y \in Y\}$.

Teorema

$$X+Y = L(X \cup Y)$$

La somma di X e Y è il più piccolo sottospazio vettoriale di $V(K)$ che contiene X e Y .

Dim: Iniziamo tutto se $Z \subseteq V(K)$ e $X \cup Y \subseteq Z$

$\Rightarrow \forall x \in X, \forall y \in Y \quad x+y \in Z \Rightarrow$ in particolare

$$X+Y \subseteq Z$$

In particolare $X+Y \subseteq L(X \cup Y)$

Verifichiamo adesso che $X+Y$ è sottospazio vettoriale

Siano $\bar{a} = (\bar{x}_1 + \bar{y}_1), \bar{b} = (\bar{x}_2 + \bar{y}_2) \in X+Y$

mostriamo che $\forall \alpha, \beta \in K, \boxed{\alpha \bar{a} + \beta \bar{b} \in X+Y}$

$$\alpha \bar{a} + \beta \bar{b} = \alpha(\bar{x}_1 + \bar{y}_1) + \beta(\bar{x}_2 + \bar{y}_2) =$$

$$= (\alpha \bar{x}_1 + \beta \bar{x}_2) + (\alpha \bar{y}_1 + \beta \bar{y}_2) = x_3 + y_3 \in X+Y$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & & \parallel \\ x_3 \in X & & y_3 \in Y \end{array}$$

DOMANDE 1) qual è un insieme di generatori per $X+Y$? □

2) qual è una base per $X+Y$?

↓
qual è la dimensione di $X+Y$?

Oss. Sia $G_1 = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ un insieme di generatori per X
 $G_2 = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_e)$ un insieme di generatori per Y

$\Rightarrow G_1 \cup G_2$ è un insieme di generatori per $X+Y$

ogni vettore $\bar{x}$ di X si scrive come c. lineare
di un numero finito di elementi di G_1

ogni vettore $\bar{y}$ di Y si scrive come c. lineare
di un numero finito di elementi di G_2

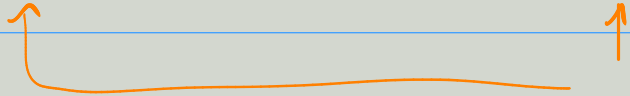
$\Rightarrow \bar{x} + \bar{y}$ si scrive come c. lineare di un numero
finito di elementi di $G_1 \cup G_2$

In generale però anche se G_1 e G_2 sono libere
non è detto che $G_1 \cup G_2$ sia libera

$$\mathbb{R}^4$$

$$G_1 = ((1\ 0\ 0\ 0), (\underline{0\ 1\ 1\ 0})) \quad G_2 = ((\underline{0\ 1\ 1\ 0}), (0\ 0\ 0\ 1))$$

$$G_1 \cap G_2 = \emptyset$$

$$G_1 = ((1\ 0\ 0\ 0), (\underline{0\ 1\ 1\ 0})) \quad G_2 = ((\underline{0\ 1\ 1\ 0}), (0\ 0\ 0\ 1))$$


In generale l'unione di una base di X con una
base di Y è una sequenza di generatori
per $X+Y$ ma non è libera $\Rightarrow$ non è
una base.

$$\underline{\dim(X+Y) \leq \dim(X) + \dim(Y)}$$

Summa diretta

Def: Siano $X, Y \subseteq V(K)$. Si dice che la somma $S = X+Y$ è diretta e si scrive $X \oplus Y$ se ogni vettore di S si può scrivere in modo unico come $\bar{s} = \bar{x} + \bar{y}$ con $\bar{x} \in X$ e $\bar{y} \in Y$.

In altre parole $X \oplus Y \Leftrightarrow \forall \bar{s} \in X+Y \exists! \bar{x} \in X, \exists! \bar{y} \in Y$
 tali che $\bar{s} = \bar{x} + \bar{y}$

In altre parole ancora $X \oplus Y$ è in somma diretta
 $\Leftrightarrow \exists$ un isomorfismo (bijezione).

$$\left\{ \begin{array}{l} X \times Y \longrightarrow X + Y \\ (\bar{x}, \bar{y}) \longrightarrow \bar{x} + \bar{y} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \uparrow \quad \uparrow \end{array} \right]$$

Teorema: Siano $X, Y \subseteq V(K)$ tali che $X \oplus Y$.

E siano $B = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m)$ $B' = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$

due basi rispettivamente di X e di Y .

Allora $B \cup B'$ è una base di $X \oplus Y$.

DIM: Ovviamente $B \cup B'$ è un insieme di generatori per $X \oplus Y$

Facciamo vedere che è libero.

→ ogni vettore $\bar{x}$ di X si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori di B

→ ogni vettore $\vec{y}$ di Y si scrive in modo unico come c. lineare dei vettori di B' .

$\Rightarrow$ ogni vettore di $X \oplus Y$ si scrive in modo
 unico come c. lineare $(\bar{x} + \bar{y})$ con $\bar{x} \in X$ $\bar{y} \in Y$.
 $\Rightarrow \bar{x} + \bar{y}$ si scrive in modo unico
 come c. lineare di ~~due~~ vettori di $B \cup B'$.

DIH:

$$\underline{0} \in X \oplus Y \quad \text{und} \quad \underline{0} = \underline{0}_X + \underline{0}_Y$$

0 $\neq$ si scrive in un solo unico rispetto
a O_3

$$\frac{\partial}{\partial y} \approx \frac{\partial}{\partial \beta'}$$
 $\Rightarrow \square$

Corollario: Se $X \oplus Y \Rightarrow \dim(X \oplus Y) = \dim X + \dim Y$.

Come riconoscere una somma diretta?

Teorema: Siano $X, Y \subseteq V(K) \Rightarrow X \oplus Y \Leftrightarrow \underline{X \cap Y = \{0\}}$.

N.B. $X \cap Y \neq \emptyset$ e due sottospazi hanno sempre in comune almeno 0

$\Rightarrow$ l'intersezione è banale

DIM: Supponiamo $X \oplus Y$ diretta e sia $\bar{v} \in X \cap Y$.

$\Rightarrow$ ogni vettore $\bar{v}$ della somma si scrive in modo unico come $\bar{v} = \bar{x} + \bar{y}$ con $\bar{x} \in X, \bar{y} \in Y$ ma $\bar{v} \in X \cap Y$.

$$\Rightarrow \bar{v} = \bar{x} + \bar{y} = (\underbrace{\bar{x} - \bar{v}}_{\in X}) + (\underbrace{\bar{y} + \bar{v}}_{\in Y}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \bar{x} = x + \tau \\ \bar{y} = y + \tau \end{array} \right\} \Rightarrow \tau = 0 \Rightarrow X \cap Y = \{0\}$$

Viceversa: Sia $X \cap Y = \{0\}$ e

consideriamo $\bar{\alpha} = \bar{x} + \bar{y} \in X + Y$

se la somma non fosse diretta

$\Rightarrow \exists \bar{\alpha} \in X + Y$ con

$$\bar{\alpha} = \bar{x} + \bar{y} = \bar{x}' + \bar{y}' \quad \text{con } (\bar{x}, \bar{y}) \neq (\bar{x}', \bar{y}')$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc} \bar{x} - \bar{x}' & = & \bar{y}' - \bar{y} \\ \in X & & \in Y \end{array} \Rightarrow (\bar{x} - \bar{x}'), (\bar{y}' - \bar{y}) \in X \cap Y = \{0\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{x} - \bar{x}' = 0 \\ \bar{y} - \bar{y}' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \bar{x} = \bar{x}' \\ \bar{y} = \bar{y}' \end{array} \quad \text{⚡}$$

Ne segue che $X \oplus Y$

□

In particolare se $X \oplus Y \Rightarrow \boxed{\dim(X \oplus Y) = \dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y)}$

(visto che $\dim(X \cap Y) = \dim(\{0\}) = 0$)

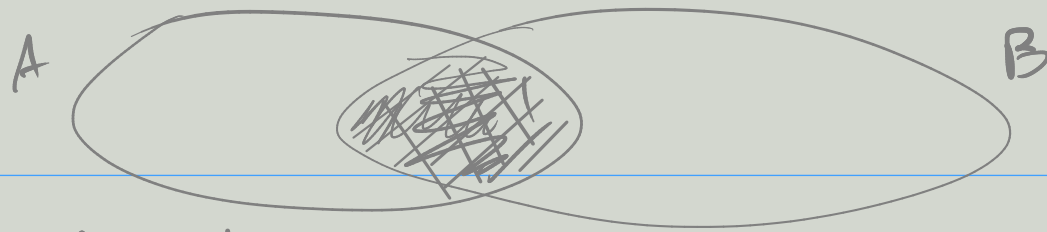
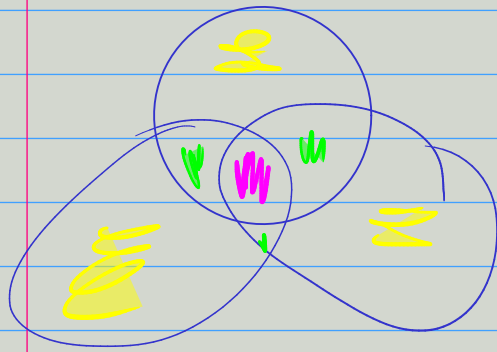
Teorema (Formula di Grassmann)

$$\boxed{\dim(X + Y) = \dim(X) + \dim(Y) - \dim(X \cap Y)}$$

«Esempio di "principio di inclusione/esclusione"»

hanno A e B due insiemi $\Rightarrow$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



$$|A \cup B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A|$$

$$A \cup B = A \setminus B \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$

$$|A \setminus B \cup (A \cap B)| = |A| = |A \setminus B| + |A \cap B|$$

$$|B \setminus A \cup (A \cap B)| = |B| = |B \setminus A| + |A \cap B|$$

↓

$$\rightarrow |A| + |B| = |A \setminus B| + 2|A \cap B| +$$

$$|B \setminus A|$$

md $\rightarrow |A \cup B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A|$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

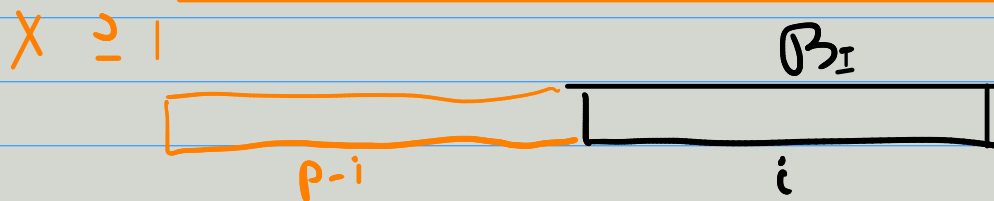
DIM (formula di Grassmann)

•) Siano $X \cap Y = \{0\} \Rightarrow X \oplus Y \Rightarrow$

$$\dim(X \oplus Y) = \dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y) \quad \square$$

• Supponiamo $X \cap Y \neq \{0\}$ poniamo $I = X \cap Y$

e sia $B_I = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_i)$ una base di I



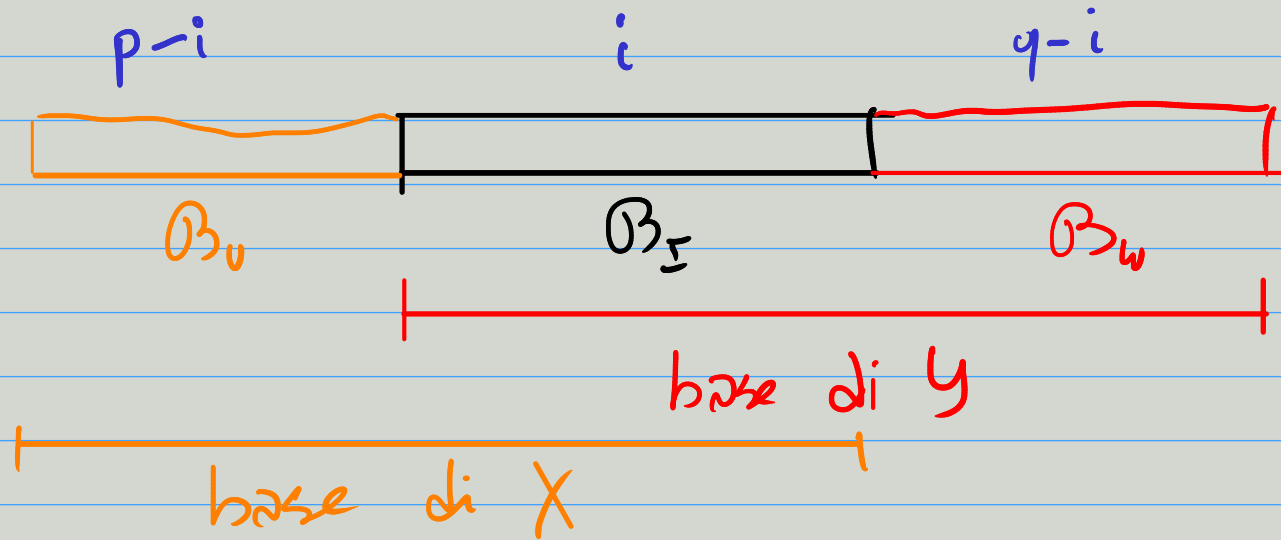
Allora $B_I \subseteq X \Rightarrow$ possiamo completare B_I a base di X aggiungendo $p-i$ vettori di X

ed ora $B_U = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{p-i})$ ove $p = \dim X$

Similmente possiamo completare B_I a base di Y

aggiungendo $q-i$ vettori ad una previa

$$B_w = (\bar{w}_1 \dots \bar{w}_{q-i}) \text{ con } q = \dim Y$$



totale vettori $(p-i) + i + (q-i) = p + q - i =$

$$\dim(X) + \dim(Y) - \dim(X \cap Y)$$

oss: $\left[\begin{array}{l} (B_v \cup B_I) \text{ è base di } X \\ (B_w \cup B_I) \text{ è base di } Y \end{array} \right] \Rightarrow B_v \cup B_I \cup B_w$
 è un sistema
 di generatori per

$$X + Y$$

DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE

$$B_U \cup B_F \cup B_W = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{p-1}, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_i, \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{q-i})$$

È LIBERA

(perché allora è una base e $\dim(X+Y) = \dim(X) + \dim(Y) - \dim(X \cap Y)$)

Supponiamo per assurdo che no legata.

$$\underline{0} = \alpha_1 \bar{u}_1 + \dots + \alpha_{p-1} \bar{u}_{p-1} + \beta_1 \bar{e}_1 + \dots + \beta_i \bar{e}_i + \gamma_1 \bar{w}_1 + \dots + \gamma_{q-i} \bar{w}_{q-i}$$

con coeff. non tutti nulli.

Se per assurdo fossero $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{p-1} = 0$

$\Rightarrow$ avremmo una c. lineare a coeff. non tutti 0 che dà 0 di vettori di $B_F \cup B_W$ che è base di Y

$\Rightarrow$ ASSURDO. $\rightarrow$ almeno un α_i è diverso da 0
 (ciò implica che almeno un γ_i deve essere $\neq 0$).

Il vettore $\bar{u} = \alpha_1 \bar{u}_1 + \dots + \alpha_{p-1} \bar{u}_i \neq 0$

$\bar{u} \in X$ ma

$\bar{u} = -\beta_1 \bar{e}_1 - \dots - \beta_i \bar{e}_i - \gamma_1 \bar{w}_1 - \dots - \gamma_{q-1} \bar{w}_{q-1} \in Y.$

Quindi $\bar{u} \in X \cap Y = \underline{I}$ (e in particolare $\bar{u}$ è
 combinazione lineare dei vettori di B_I).

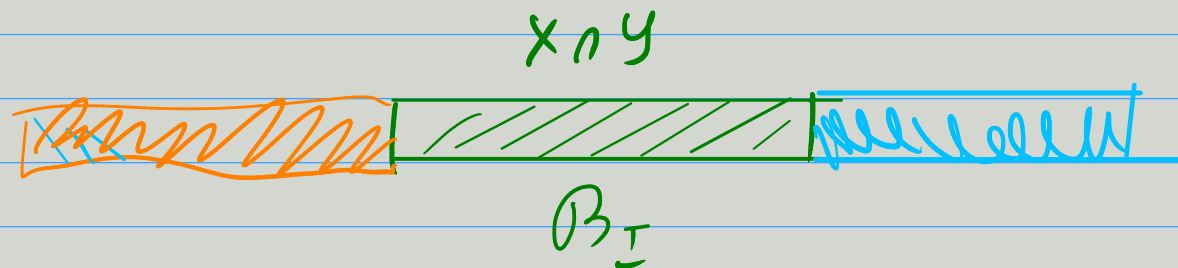
$\bar{u} = \delta_1 \bar{e}_1 + \dots + \delta_i \bar{e}_i$ con $(\delta_1 \dots \delta_i) \neq 0$

ma sono abbiamo

$$\underbrace{\alpha_1 \bar{u}_1 + \dots + \alpha_{p-1} \bar{u}_i}_{\bar{u}} - \underbrace{\delta_1 \bar{e}_1 - \dots - \delta_i \bar{e}_i}_{-\bar{u}} = \underline{0}$$

ma questa è una comb. lineare a coefficienti
non tutti 0 dei vettori di una base di X

↙ ASSURDO $\Rightarrow$ la sequenza $B_u \cup B_I \cup B_w$
è libera □



N.B. questo è anche un modo per calcolare
una base della somma.

Se si hanno X ed Y come ≥ 2 sp. vett.

se $X = \mathcal{L}(\bar{v}_1 \text{ --- } \bar{v}_n)$

$Y = \mathcal{L}(\bar{w}_1 \text{ --- } \bar{w}_t)$

costruire $X+Y$ corrispondente a

studiare $\mathcal{L}(\bar{v}_1 \text{ --- } \bar{v}_n, \bar{w}_1 \text{ --- } \bar{w}_t)$

(scritti successivi).

$X = \{ \bar{v} \mid A\bar{v} = \underline{0} \}$ $Y = \{ \bar{w} \mid A'\bar{w} = \underline{0} \}$

costruire $X \cap Y$ corrispondente a studiare

$X \cap Y = \{ \bar{v} \in \mathbb{K}^n \mid A\bar{v} = \underline{0}, A'\bar{v} = \underline{0} \}$.

$X = \{ \bar{v} \mid A\bar{v} = \underline{0} \} \rightarrow \mathcal{L}(\bar{v}_1 \text{ --- } \bar{v}_n) \xrightarrow{\text{risolvere il sistema}}$

$$X = \mathcal{L}(\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k) \rightarrow \text{eq.} \quad \text{rk} \begin{bmatrix} \bar{v}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{v}_k \\ X \end{bmatrix} = \text{rk} \begin{bmatrix} \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{v}_k \end{bmatrix}$$

Esempio

Studiare la dim. di ~~nonnull~~ ed intersezione di

$$X_k = \mathcal{L}((1+k, 2, 0), (1, 0, 0)) \text{ e}$$

$$Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$$

$$X_k \quad \text{rk} \begin{pmatrix} 1+k & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rk} \begin{pmatrix} 1+k & 2 & 0 \\ \textcircled{1} & 0 & 0 \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

$\frac{n}{2}$
↓

$$-1 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ y & z \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -2z = 0$$

$$X_K = \{(x, y, z) \mid z = 0\}$$

$$Y = \{(x, y, z) \mid x - y = 0\} \quad 3 - 1 = 2$$

$$X_K \cap Y = \{(x, y, z) \mid \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}\} = \mathcal{L}((1, -1, 0))$$

$$\dim(X_K \cap Y) = 3 - 2 = 1$$

$$\begin{aligned} \dim(X + Y) &= \dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y) \\ &= 2 + 2 - 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow X+Y = \mathbb{R}^3$$

$$X = \mathcal{L} \left(\begin{pmatrix} 1+k & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$Y = \mathcal{L} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$f = \left[\begin{array}{ccc} 1+k & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

||

$$\text{rk}(Y) = 3$$

$$\Rightarrow X+Y = \mathcal{L} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \dim X+Y = 3$$

$$\Rightarrow \text{ok}$$

$$X+Y = \mathbb{R}^3$$

#

