Quadriche generali (prive di punti doppi).

→ CLASSIFICAZIONE IN TERMINI DELLA CONICA IMPROPRIA (AFFINE)

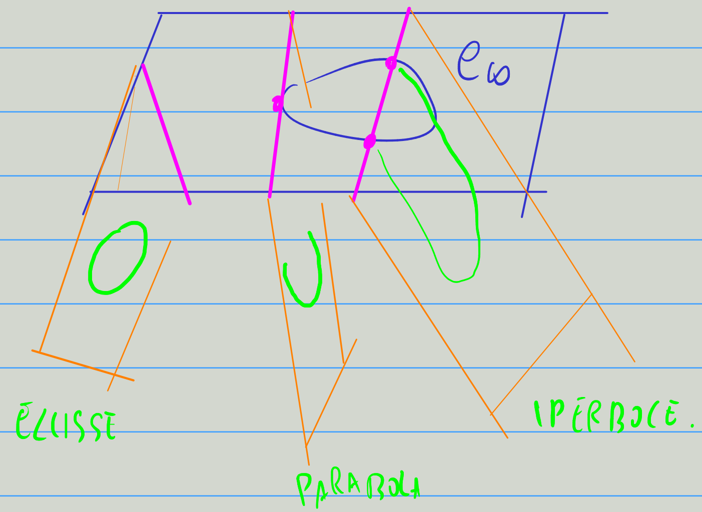
Q quadrica $\quad A_\infty$: piano improprio in $\widetilde{A_3(\mathbb{R})} \subseteq \widetilde{A_3(\mathbb{C})}$

$\mathcal{C}_\infty = Q \cap A_\infty$

- $\mathcal{C}_\infty$ é irriducibile a punti reali → Q IPERBOLOIDE
- $\mathcal{C}_\infty$ é riducibile in 2 rette → Q PARABOLOIDE (Q é tg. al piano improprio).
- $\mathcal{C}_\infty$ é irriducibile a punti non reali → Q ELLISSOIDE (priva di punti reali)

Sezioni piane generali.

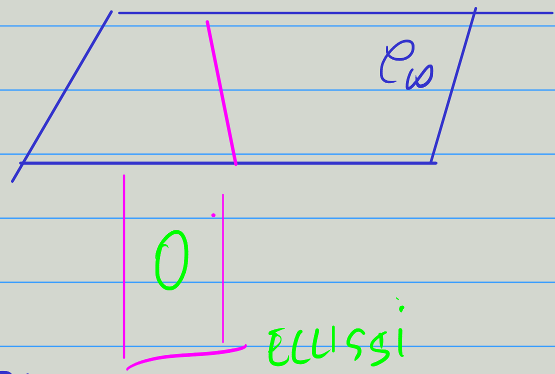
Q IPERBOLOIDE



$\Rightarrow$ Q ammette come sezioni piane irriducibili ellissi, iperboli e parabole a seconda che la retta impropria del piano rispetto la e_∞ sia esterna, secante, tangente.

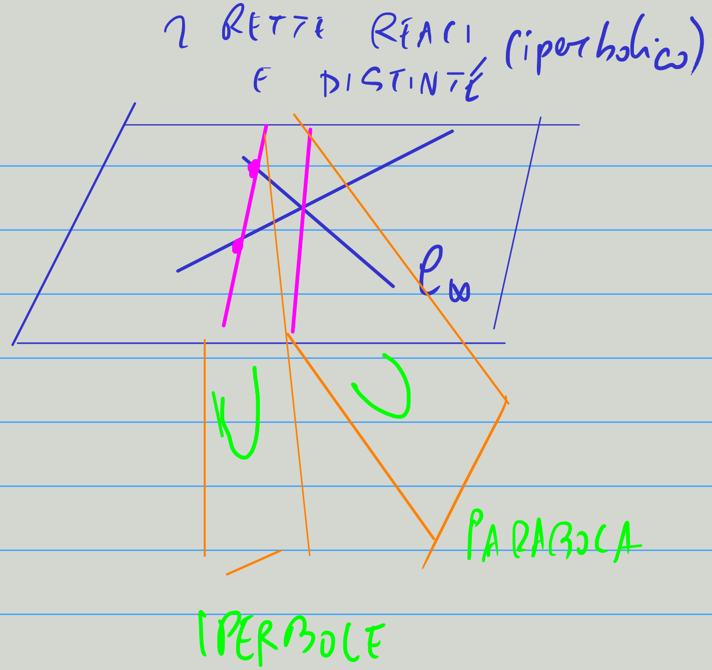
Q : ellissoide

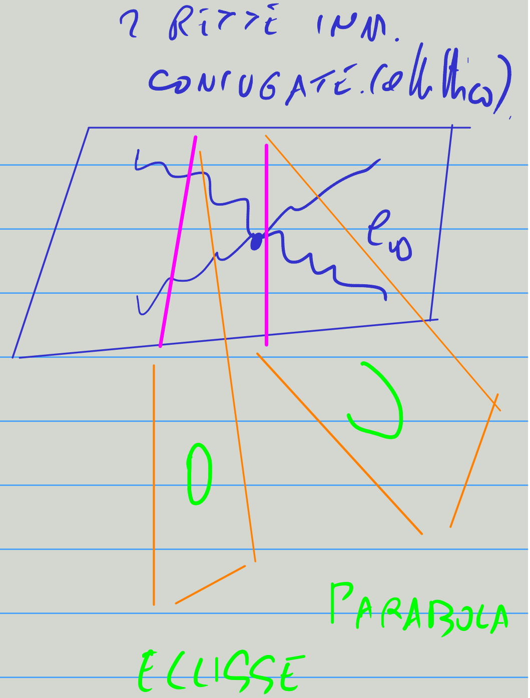
la e_∞ non ha punti reali.



$\Rightarrow$ OGNI PIANO CHE INTERSECA L'ELLISSOIDE IN UNA CONICA GENERALE CON ALMENO UN PUNTO REALE DEVE INTERSECARLO IN UNA ELLISSE.

Q: PARABOLOIDE





le sezioni piane irriducibili di un paraboloide iperbolico sono iperboli o parabole

le sezioni piane irriducibili di un paraboloide ellittico sono ellissi o parabole

NOTA: come riconoscere IPERB, PARAB, ELLISSOIDI.

$$\begin{cases} {}^tXAX = 0 \\ x_n = 0 \end{cases} \quad \text{disegnato} \quad A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Si studia la <u>CONICA</u> $\mathcal{C}_\infty$ $\begin{cases} (x_1\ x_2\ x_3) A^* \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

Usando la classificazione delle coniche

- $\mathcal{C}_\infty$ é riducibile $\iff \det A^* = 0 \iff$ PARABOLOIDE

- $\mathcal{C}_\infty$ irrid. a punti reali $\iff$ la forma bilineare indotta da A^* non é definita positiva o definita negativa $\iff$ gli autovalori di A^* non hanno tutti lo stesso segno e sono tutti $\neq 0$ $\Rightarrow$ A^* deve

IPERBOLOIDE $\iff$ avere segnatura $(+\,+\,-)$ o $(-\,-\,+)$

- $\mathcal{C}_\infty$ priva di punti reali $\iff$ la forma indotta da A^* é definita positiva o definita negativa $\iff$ tutti gli autovalori di A^* hanno lo stesso segno $\iff$ la segnatura

ELLISSOIDE $\iff$ é $(+++)$ o $(---)$.

[Teorema di inerzia di Sylvester]

- <u>OSS</u>: l'unica quadrica che può essere priva di punti reali é l'ellissoide

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

La classificazione affine delle quadriche non basta a distinguerle

NATURA DEI PUNTI DI UNA QUADRICA.

Def: Sia Q una quadrica irriducibile, $P \in Q$ un punto semplice e reale e π_P il piano tangente a Q in P.
Si dice che
- P é iperbolico se $\pi_P \cap Q$ é una conica riducibile in 2 rette reali e distinte
- P é parabolico se $\pi_P \cap Q$ é una conica riducibile in una retta contata 2 volte
- P é ellittico se $\pi_P \cap Q$ é una conica riducibile

in 2 rette immaginarie e coniugate.

<u>Teorema</u>: Sia Q una quadrica irriducibile. Allora tutti i punti semplici di Q hanno la stessa natura.

(se c'é un punto ellittico $\Rightarrow$ $\forall$ punto é ellittico
" " " iperbolico $\Rightarrow$ $\forall$ punto é iperbolico
" " " parabolico $\Rightarrow$ $\forall$ punto semplice é parabolico).

Alla luce del teorema una Quadrica generale sarà un X y

con $X \in \{$ PARABOLOIDE, ELLISSOIDE, IPERBOLOIDE $\}$

$y \in \{$ ELLITTICO, IPERBOLICO $\}$.

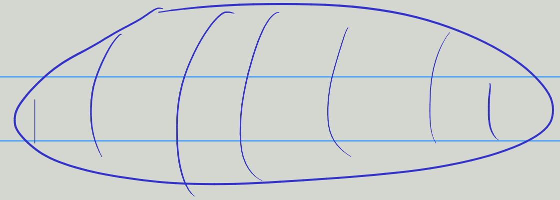
Quadrica irrid. deg.

CILINDRO/CONO A PUNTI PARABOLICI

Teorema: Tutti i punti reali di un ellissoide sono ellittici

DIM: Sia $\mathcal{E}$ un ellissoide. Supponiamo $P \in \mathcal{E}$ punto reale. Se P fosse parabolico o iperbolico $\mathcal{E} \cap \pi_P$ conterrebbe almeno una retta reale r $\Rightarrow$ in $\mathcal{E} \cap A_\infty$ ci sarebbe almeno il punto improprio di r_∞ (che è reale perché r è reale) $\Rightarrow$ $\mathcal{E} \cap A_\infty = \mathcal{C}_\infty$ non sarebbe priva di punti reali

$\square$

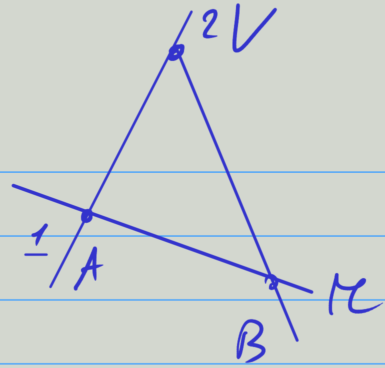


Teorema: Sia Q una quadrica irriducibile
Allora Q é a punti parabolici $\Leftrightarrow$ Q é
un cono o un cilindro.

DIM: Se Q cono o cilindro $\Rightarrow$ Q a punti parabolici:

RAMMENTIAMO CHE se Q é un cono o un
cilindro di vertice V $\Rightarrow$ ogni retta r
contenuta in Q passa per V

Infatti se così non fosse

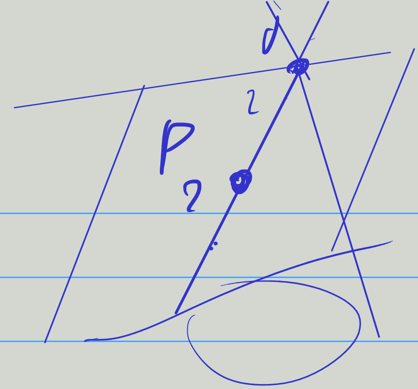


siano $A, B \in r \Rightarrow VA \subseteq Q$
$A \neq B$ $\quad VB \subseteq Q$

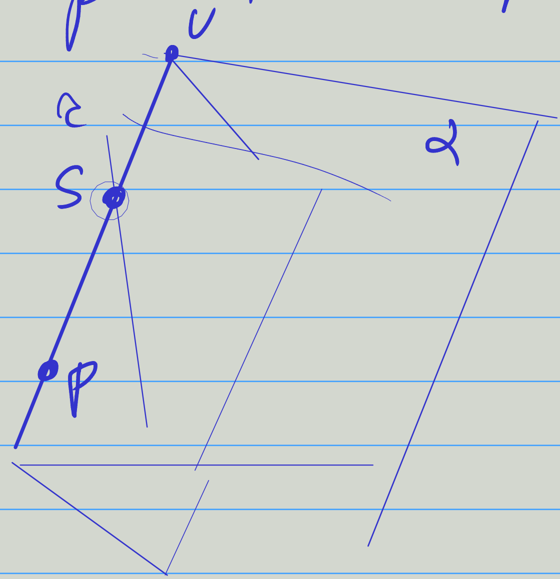
$\Rightarrow$ Il piano ABV interseca Q in una cubica (almeno) $\Rightarrow$ è componente $\Rightarrow$ Q sarebbe riducibile e non un cono o un cilindro. ┘

Sia $P \in Q$, $P \neq V$ il piano tg a Q per P deve intersecare Q in una conica con P punto doppio e riducibile in 2 rette. Ma l'unica retta per P contenuta in Q è PV $\Rightarrow$ l'intersezione deve essere una retta contata 2 volte

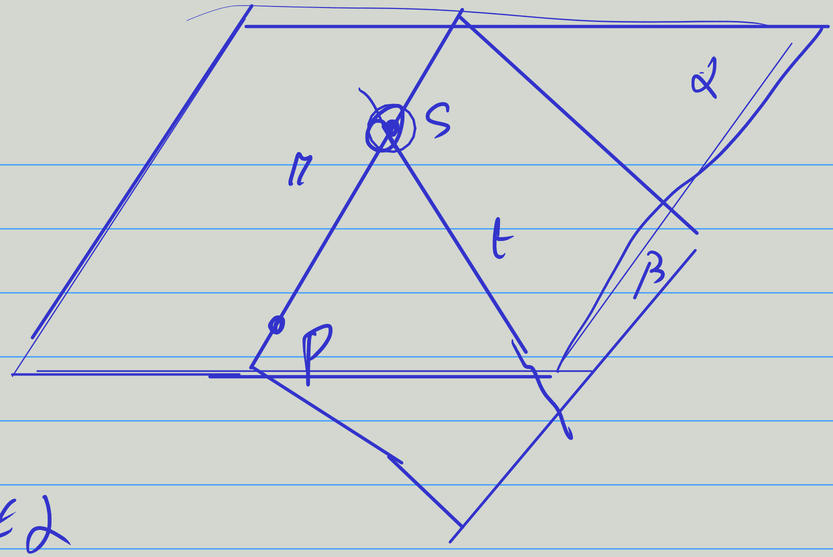
$\Rightarrow$ P parabolico.



Viceversa supponiamo Q irriducibile con P punto parabolico e sia r la retta contenuta in Q passante per P ottenuta come $Q \cap \pi_P$ con $\alpha = \pi_P$



Abbiamo che per ogni punto $S \in r$ il piano tg. a Q per S deve contenere la retta r. Sia $\beta \neq \alpha$.



$\beta \neq \alpha$

N.B: Se $\beta \cap Q = r_i$ contata 2 volte $\Rightarrow$
β interseca in P 2 volte Q $\Rightarrow$
β é tangente a Q in P $\Rightarrow$
perché il piano tangente in P a Q
é α.
Ne segue che β interseca Q a 2 rette
distinte ed incidenti in S

D'altro canto S non può essere semplice, perché se S fosse semplice e interseca Q in S 2 volte ($S \in r$) e β interseca Q in S 2 volte ($S \in r \cap t$). $\Rightarrow$ esisterebbero 2 piani tg a Q in S $\Downarrow$ $\Rightarrow$ S è un punto doppio $\Rightarrow$ Q ha esattamente un punto doppio (perché è irriducibile) $\Rightarrow$ Q è un cono o un cilindro. $\square$

N.B I piani per il vertice di un cono o un cilindro intersecano ~~[illegible]~~ tutte le quadriche in 2 rette.

A) reali e coincidenti se sono piani tangenti
IN UN ALTRO PUNTO $\neq$ Vertice

B) reali e distinte

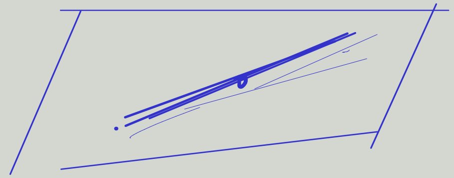
C) IMMAGINARIE E CONIUGATE che hanno come unico punto reale il vertice.

Sappiamo che se c'è un pto semplice parabolico

$\Rightarrow \forall$ punto semplice è parabolico
(perché c'è un cono o un cilindro).

un PARABOLOIDE PARABOLICO <u>NON</u> PUÒ ESISTERE

⌈ Se la C_∞ è una retta contata 2 volte $\Rightarrow$ Q è un <u>cilindro</u> di tipo parabolico perché

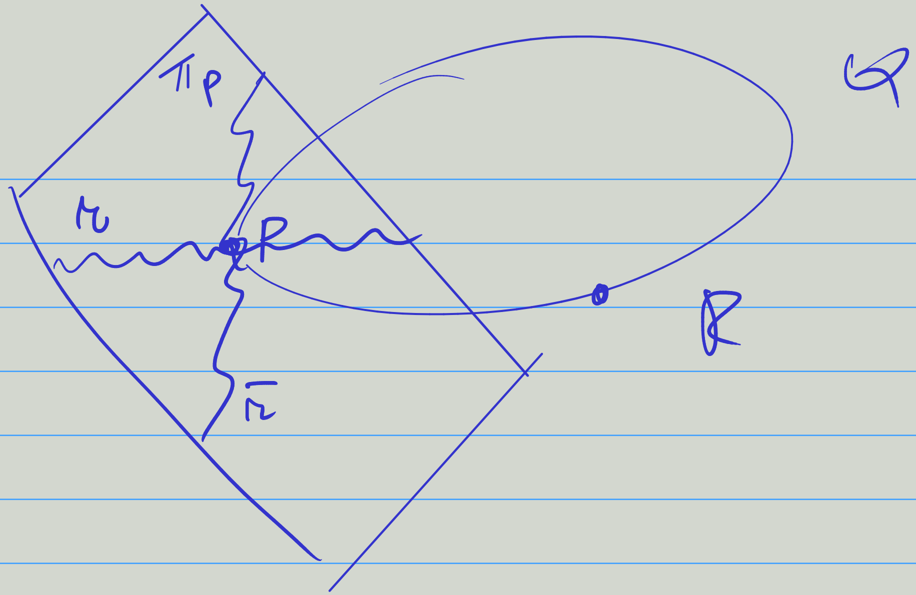


A) pto parabolico $\Rightarrow$ CONO o CILINDRO

B) C_∞ riducibile $\Rightarrow$ CILINDRO (vertice improprio)

C) C_∞ = rette $\Rightarrow$ le sezioni piane irriducibili sono parabole. ⌋

DIM Teorema che se c'è un punto ellittico $\forall$ punto è ellittico (se c'è un punto iperbolico $\Rightarrow$ $\forall$ punto è iperbolico)



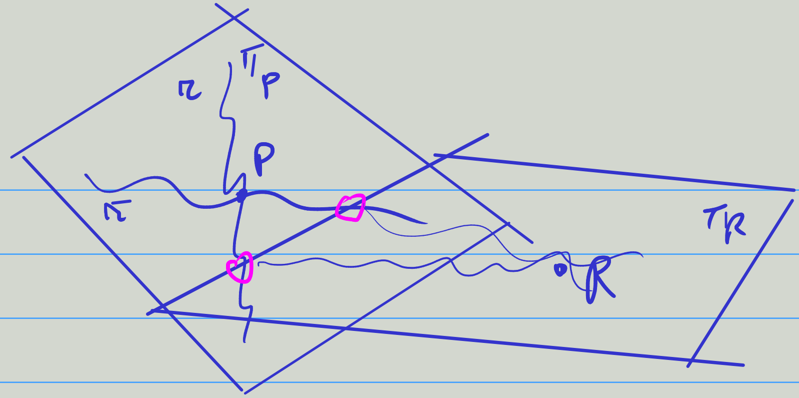
$P \in Q$ punto ellittico e sia π_P il piano tg a Q in P

$r, \bar{r}$ le due rette immaginarie e coniugate di $\pi_P \cap Q$.

Adesso sia $R \in Q$ con $R \neq P$

Indichiamo con π_R il piano tg. a Q in R

ed osserviamo che $\pi_R \cap \pi_P = s$.



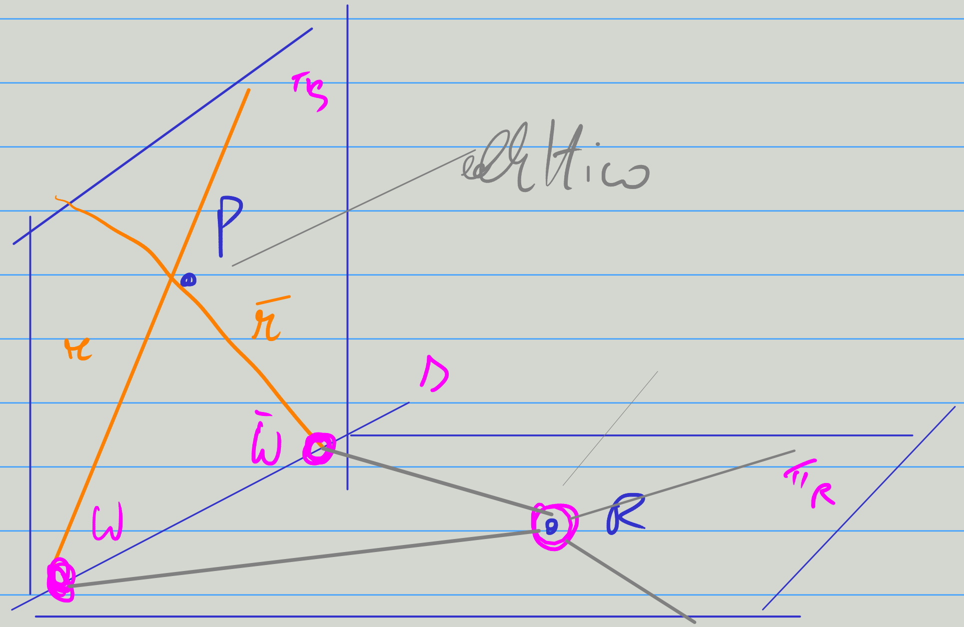
La retta s non passa per P, perché altrimenti RP sarebbe contenuta nella quadrica e retta reale (ma per P non ci sono rette reali)

$s \cap r = W$ e $s \cap \bar{r} = \overline{W}$ con $W, \overline{W} \in Q$ e $W \neq \overline{W}$. Osserviamo che la retta RW e la retta $R\overline{W}$ sono contenute in Q in quanto contenute in π_R (piano tg. a Q in R) e passano per R e un altro punto (W, $\overline{W}$)

della conica riducibile $Q \cap \pi_R$.

$\Rightarrow$ $Q \cap \pi_R = RW \cup R\overline{W}$ e le rette RW e $R\overline{W}$ sono immaginarie e coniugate

$\Rightarrow$ R è ellittico



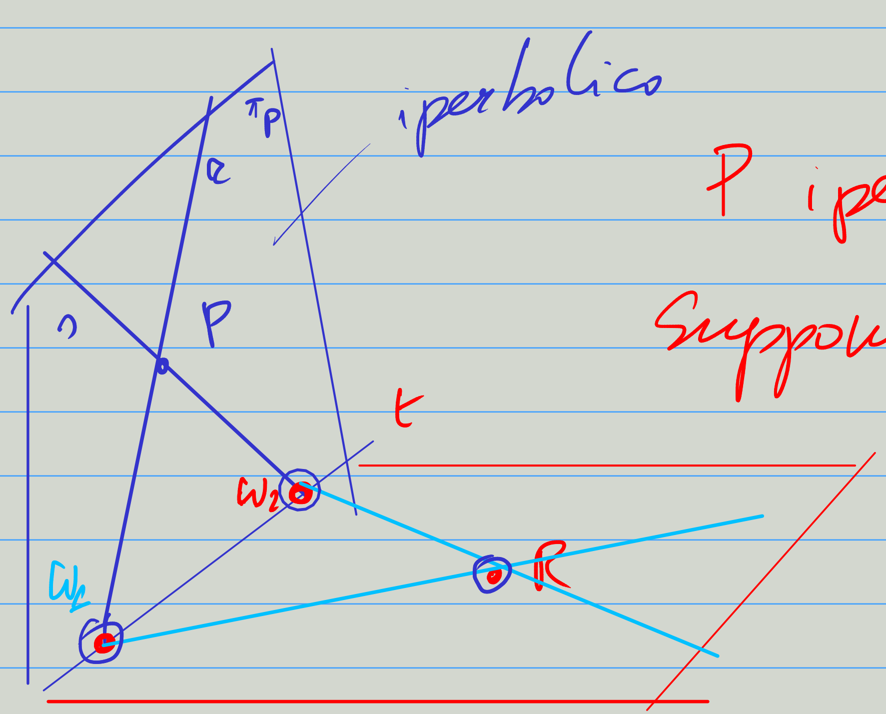
Per i punti iperbolici

A) si ragiona per esclusione

se c'è un punto semplice iperbolico $\Rightarrow$ NON POSSONO ESSERCI PUNTI SEMPLICI ELLITTICI o PARABOLICI

$\Rightarrow \forall$ i punti semplici sono iperbolici $\square$

B)



P iperbolico. π_p piano tg in P

Supponiamo $R \notin \pi_p$

Prendiamo

$t = \pi_R \cap \pi_p$

$\{w_1, w_2\} = t \cap (r \cup s)$

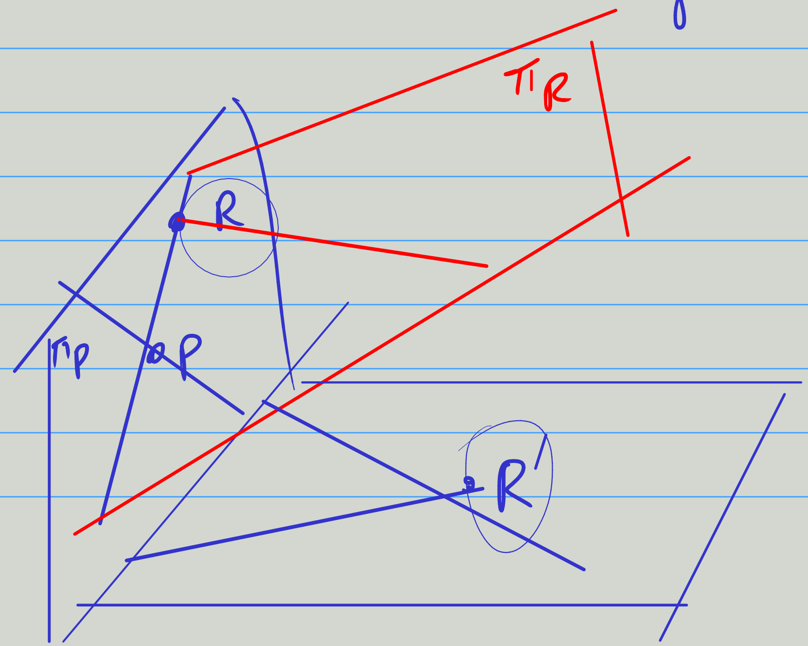
e facciamo vedere che

$$\pi_R \cap Q = RW_1 \cup RW_2$$

ed RW_1, RW_2 sono rette reali.

Se $R \in \pi_P \Rightarrow$ si prende $R' \notin \pi_R \cup \pi_P$ e si dimostra come sopra che R' é iperbolico.

poi si ragiona a partire da R' su R per mostrare che R é iperbolico.



$\square$

Quadriche irriducibili

1) CONI O CILINDRI ⟷ A PUNTI PARABOLICI

POSSONO ANCHE AVERE COME UNICO PTO REALE IL VERTICE

2) IPERBOLOIDI

- ELLITTICI (privi di rette reali) A DUE FALDE
- IPERBOLICI (contengono rette)

3) PARABOLOIDI

- ELLITTICI (privi di rette reali)
- IPERBOLICI

4) ELLISSOIDI

- → ELLITTICI.
- → PRIVI DI PUNTI REALI

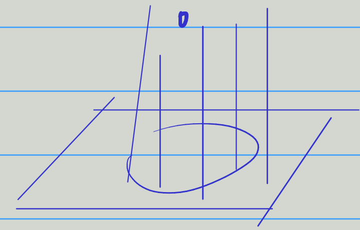
FINE CORSO

1) Luogo geometrico delle rette che proiettano i punti di una conica da V_∞ improprio

2) trovare un piano tale che int. sia riducibile

(1) $\Rightarrow$ QUADRICA è un CILINDRO

(a punti parabolici).



(2) ogni piano per il vertice interseca in una conica riducibile.

$\Downarrow$ trovare un piano per V_∞

$\alpha: x_4 = 0$ $\beta: 2y - z = 0$

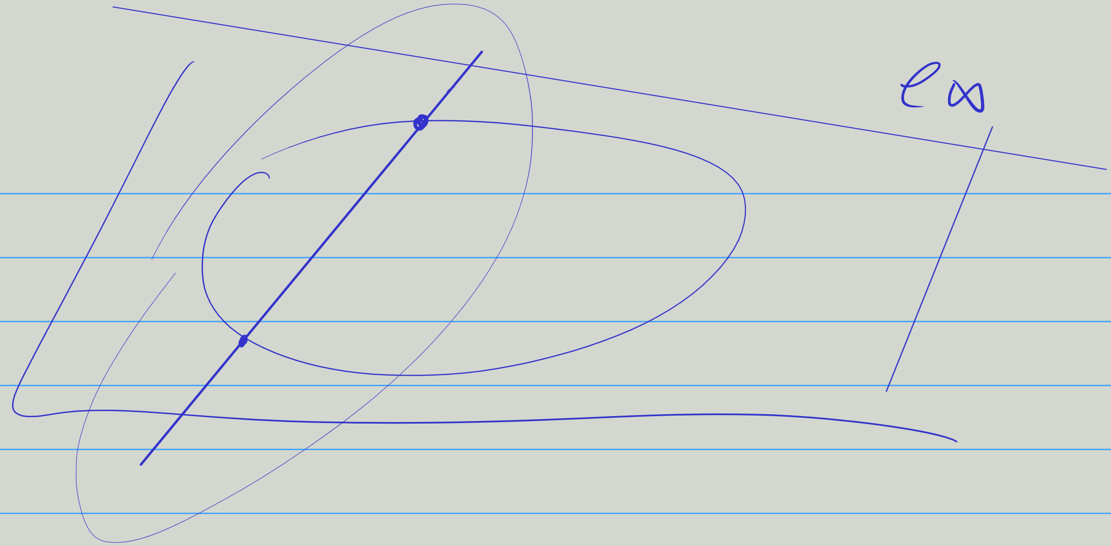
[OGNI SEZIONE PIANA DI UN cono/CILINDRO per il VERTICE É RIDUCIBILE

---

1) OGNI SEZIONE PIANA IRRIDUCIBILE DI UN CILINDRO É DELLO STESSO TIPO

2) Se vi si chiede una conica come sez. piana di un cono che sia ellisse/iperbole/parabola NON POTETE PRENDERE IL PIANO IMPROPRIO!

DOVETE TROVARE UN PIANO <u>PROPRIO</u> la cui retta impropria sia esterna/secante/tangente la C_∞



Se siamo in ambito proiettivo e $[(1\,0\,0\,0)], [(0\,1\,0\,0)] \in \mathcal{C}_\infty$

Un piano che interseca $\mathcal{Q}$ in una iperbole è un piano NON TANGENTE che passa per essi

$\mathcal{L}\left[(1\,0\,0\,0), (0\,1\,0\,0), (\alpha\,\beta\,\gamma\,1)\right]$

in cui il piano non è tg $\leftarrow$ pto proprio di $\mathcal{Q}$